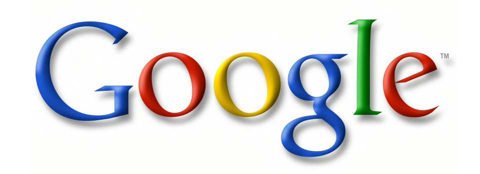
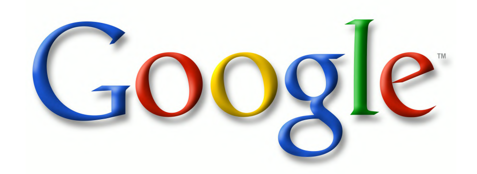
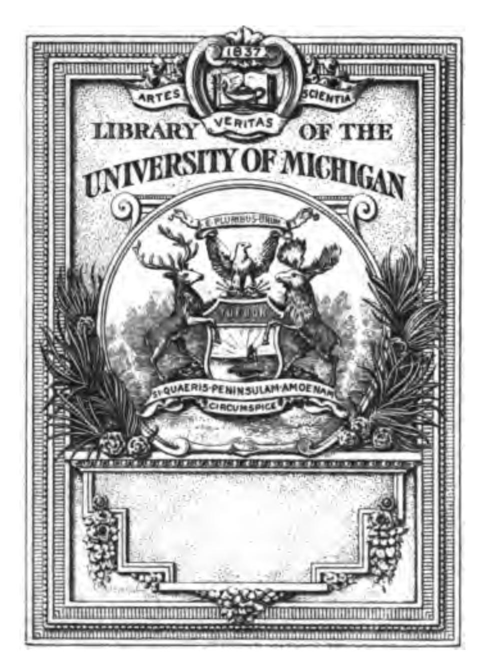




Die

ert

un heitlich
an Einzel-
da Grund-
lag rbinden.
Di nur für
de Fächern,
di unter-
ric sondern
ei Studium,
be Dabei
wi r Tech-
ni Masse
R



Verzeichnis

der erschienenen und projektierten Bände der

„Sammlung Schubert".

Erschienen sind bis Ende 1901:

Band I: **Elementare Arithmetik und Algebra** von Prof. Dr. Hermann Schubert in Hamburg Mk. 2.80.

„ II: **Elementare Planimetrie** von Prof. W. Pflieger in Münster i. E. Mk. 4.80.

„ III: **Ebene und sphärische Trigonometrie** von Dr. F. Bohnert in Hamburg. Mk. 2.—.

„ VI: **Algebra mit Einschluss der elementaren Zahlentheorie** von Dr. Otto Pund in Altona. Mk. 4.40.

„ VII: **Ebene Geometrie der Lage** von Prof. Dr. Rud. Böger in Hamburg. Mk. 5.—.

„ VIII: **Analytische Geometrie der Ebene** von Prof. Dr. Max Simon in Strassburg. Mk. 6.—.

„ IX: **Analytische Geometrie des Raumes I: Gerade, Ebene, Kugel** von Prof. Dr. Max Simon in Strassburg. Mk. 4.—.

„ X: **Differentialrechnung** von Prof. Dr. Franz Meyer in Königsberg. Mk. 9.—.

„ XII: **Elemente der darstellenden Geometrie** von Dr. John Schröder in Hamburg. Mk. 5.—.

„ XIII: **Differentialgleichungen** von Prof. Dr. L. Schlesinger in Klausenburg. Mk. 8.—.

„ XIV: **Praxis der Gleichungen** von Prof. C. Runge in Hannover. Mh. 5.20.

„ XIX: **Wahrscheinlichkeits- und Ausgleichungsrechnung** von Dr. Norbert Herz in Wien. Mk. 8.—.

„ XX: **Versicherungsmathematik** von Dr. W. Grossmann in Wien. Mk. 5.—.

„ XXV: **Analytische Geometrie des Raumes II: Die Flächen zweiten Grades** von Prof. Dr. Max Simon in Strassburg. Mk. 4 40.

„ XL: **Mathematische Optik** von Dr. J. Classen in Hamburg. Mk. 6.—.

Wenden!

In Vorbereitung bezw. projektiert sind:

Elementare Stereometrie Dr. F. Bohnert in Hamburg.

Niedere Analysis von Prof. Dr. Herm. Schubert in Hamburg.

Integralrechnung von Prof. Dr. Franz Meyer in Königsberg.

Elemente der Astronomie von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.

Mathematische Geographie von Dr. Ernst Hartwig in Bamberg.

Anwendungen der darstellenden Geometrie von Dr. John Schröder in Hamburg.

Geschichte der Mathematik von Prof. Dr. A. v. Braunmühl und Prof. Dr. S. Günther in München.

Dynamik von Dr. Karl Heun in Berlin.

Technische Mechanik von Dr. Karl Heun in Berlin.

Geodäsie von Prof. Dr. C. Reinhertz in Hannover.

Allgemeine Funktionentheorie von Dr Paul Epstein in Strassburg.

Räumliche projektive Geometrie.

Geometrische Transformationen von Dr. Karl Doehlemann in München.

Theorie der höheren algebraischen Kurven.

Allgemeine Theorie der Flächen und Raumkurven I von Prof. Dr. Victor Kommerell in Calw und Dr. Karl Kommerell in Gmünd.

Elliptische Funktionen von Dr. Paul Epstein in Strassburg.

Hyperelliptische und Abelsche Funktionen von E. Landfried in Strassburg.

Theorie und Praxis der Reihen von Prof. C. Runge in Hannover.

Invariantentheorie von Dr. Jos. Wellstein in Strassburg.

Liniengeometrie von Prof. Dr. Konrad Zindler in Innsbruck.

Mehrdimensionale Geometrie von Prof. Dr. P. H. Schoute in Groningen.

Allgemeine Theorie der Flächen und Raumkurven II von Prof. Dr. Victor Kommerell in Calw und Dr. Karl Kommerell in Gmünd.

Kinematik von Dr. Karl Heun in Berlin.

Potentialtheorie von Oberlehrer Grimsehl in Hamburg.

Mechanische Wärmelehre von Prof. Dr. W. Voigt in Göttingen.

Sammlung Schubert XX

Versicherungsmathematik

von

Dr. Wilhelm Grofsmann

Leipzig
G. J. Göschensche Verlagshandlung
1902

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt. Einleitung.

Zweiter Abschnitt. Versicherung einfacher Leben.

Erstes Kapitel. Einmal-Prämien der Erlebens- und Rentenversicherung.

Seite

Achtes Kapitel. **Prämien-Reserve.**

Dritter Abschnitt. **Versicherung verbundener Leben.**

Neuntes Kapitel.

Vierter Abschnitt. **Invalidenversicherung.**

Zehntes Kapitel.

Fünfter Abschnitt. Krankenversicherung.

Elftes Kapitel.

Erster Abschnitt.

Einleitung.

§ 1. Auf- und Abzinsungsfaktor, Endwert, diskontierter Wert.

Bei einem Zinsfuſse von p Prozent pro Jahr tragen 100 Mark in einem Jahre p M., mithin 1 M. $\frac{p}{100}$ M. Zinsen; es wächst daher 1 M. in 1 Jahre auf $\left(1+\frac{p}{100}\right)=(1+i)$ M. an, wenn

$$\frac{p}{100}=i \text{ gesetzt wird;}$$

am Ende des 2. Jahres sind die $(1+i)$ M. samt Zinsen und Zinseszinsen auf $(1+i)(1+i)=(1+i)^2$,
am Ende des 3. Jahres auf $(1+i)^2(1+i)=(1+i)^3$, allgemein
„ „ „ $n.$ „ „ $(1+i)^{n-1}(1+i)=(1+i)^n$ M. angewachsen.

$(1+i)^n=r^n$ ist der **Endwert** des zum Zinsfuſse von $100i=p$ Prozent auf Zinsen und Zinseszinsen angelegten Betrages 1,

$$C_n=C(1+i)^n=Cr^n \qquad 1)$$

der Endwert des zum Zinsfuſse von $100i$ Prozent auf Zinsen und Zinseszinsen angelegten Anfangskapitals C, wo

$$r=1+i=1+\frac{p}{100}$$

der **Aufzinsungsfaktor** genannt wird.

Für 3 % ist der Aufzinsungsfaktor $r = 1.03$, für $3^1/_4$ % $r = 1.0325$ u. s. w.

Das Kapital C, das gegenwärtig angelegt werden muſs, um nach n Jahren zum Zinsfuſse i samt Zinsen und Zinseszinsen auf den Betrag C_n anzuwachsen, heiſst der gegenwärtige oder diskontierte Wert oder auch Barwert des Betrages C_n.

Aus $$Cr^n = C_n$$

folgt $$C = \frac{C_n}{r^n} = C_n \frac{1}{(1+i)^n} \qquad 2)$$

als diskontierter Wert des Betrages C_n und für $C_n = 1$

$$\varrho^n = \frac{1}{r^n} = \frac{1}{(1+i)^n}$$

als diskontierter Wert des Betrages 1, wo

$$\varrho = \frac{1}{r} = \frac{1}{1+i}$$

der Abzinsungs- oder Diskontierungsfaktor genannt wird.

Die Formeln 1) und 2) gelten nicht nur für ganze, sondern auch für beliebige gebrochene oder gemischte Werte von n.

---

§ 2. Zeitrenten.

Erhält jemand regelmäſsig in bestimmten Zeitabschnitten wiederkehrend bestimmte Beträge, so sagen wir, er bezieht eine Rente und nennen sie, wenn sie eine im voraus festgesetzte Zeit hindurch gezahlt wird, eine Zeitrente.

Erfolgt die Zahlung zu Beginn eines jeden Jahres, nennen wir sie eine anticipative oder vorschüssige, erfolgt die Zahlung dagegen am Schlusse eines jeden Jahres, eine dekursive oder nachschüssige Rente.

Wir bezeichnen den gegenwärtigen Wert einer n Jahre hindurch zu Beginn eines jeden Jahres im Betrage 1 zahlbaren Rente mit $\overset{n}{\overline{R}}$, einer n Jahre hindurch am Schlusse eines jeden Jahres zahlbaren Rente mit ${}_{(1)}\overset{n}{\overline{R}}$.

Der gegenwärtige Wert eines sofort zahlbaren Betrages $1 = 1$

„ „ „ „ nach 1 Jahre „ „ $1 = \frac{1}{r}$

„ „ „ „ „ 2 Jahren „ „ $1 = \frac{1}{r^2}$

. . . .

der gegenwärtige Wert des letzten, zu Beginn des n-ten Jahres, also nach $(n-1)$ Jahren zahlbaren Betrages $1 = \frac{1}{r^{n-1}}$, daher

$$\overset{n}{\bar{R}} = 1 + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^{n-1}}$$

und nach Summierung der geometrischen Progression auf der rechten Seite der Gleichung

$$\overset{n}{\bar{R}} = \frac{1 - \frac{1}{r^n}}{1 - \frac{1}{r}} \tag{1}$$

oder

$$\overset{n}{\bar{R}} = \frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r-1)}. \tag{2}$$

Da bei der dekursiven Rente die Anzahl der geleisteten Zahlungen ebenso wie bei der anticipativen Rente gleich n ist, jede einzelne Zahlung jedoch um ein Jahr später erfolgt, mufs

$$_{(1)}\overset{n}{\bar{R}} = \frac{\overset{n}{\bar{R}}}{r} \tag{3}$$

und aus 2)

$$_{(1)}\overset{n}{\bar{R}} = \frac{r^n - 1}{r^n(r-1)} \tag{4}$$

zu welchem Werte auch die Summierung

$$_{(1)}\overset{n}{\bar{R}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \ldots + \frac{1}{r^n}$$

führt.

Nehmen wir an, dafs die Rente ewig gezahlt wird, so ist $n = \infty$, und da $\left(\frac{1}{r^n}\right)_{n=\infty} = 0$, aus 1)

$$\left(\overset{n}{\overline{R}}\right)_{n=\infty} = \frac{1}{1-\frac{1}{r}} \text{ oder } \left(\overset{n}{\overline{R}}\right)_{n=\infty} = \frac{r}{r-1} = \frac{1+i}{i} = 1 + \frac{1}{i} \qquad 5)$$

der gegenwärtige Wert der **anticipativen** ewigen Rente und aus 3)

$$\left({}_{(1)}\overset{n}{\overline{R}}\right)_{n=\infty} = \frac{1}{r-1} = \frac{1}{i} \qquad 6)$$

der gegenwärtige Wert der **dekursiven** ewigen Rente.

Für $3\,^0/_0$ ist der Wert der anticipativen ewigen Rente $= \frac{1\cdot03}{0\cdot03} = 34\cdot\dot{3}$,

der Wert der dekursiven ewigen Rente $= \frac{1}{0\cdot03} = 33\cdot\dot{3}$.

---

§ 3. Sterbenswahrscheinlichkeit. Erlebenswahrscheinlichkeit.

Eine Tafel, welche die Anzahl der von L_0 Neugeborenen, also 0-jährigen Personen nach 1, 2, 3, ... n ... ω Jahren noch am Leben befindlichen $L_1, L_2, L_3, \ldots L_n \ldots L_\omega$ Personen — wo ω das höchste beobachtete Alter bezeichnen möge — enthält, heifst **Sterblichkeitstafel**.

Auf Grund verschiedener, in verschiedenen Ländern und an verschiedenen Bevölkerungsschichten vorgenommener Beobachtungen wurden verschiedene Sterblichkeitstafeln gewonnen, von denen einige der am häufigsten im Gebrauche befindlichen auf Seite 6 und 7 enthalten sind.

Unter der **Sterbenswahrscheinlichkeit** τ_n einer n-jährigen Person versteht man die Wahrscheinlichkeit, dafs eine n-jährige Person innerhalb eines Jahres stirbt, unter der **Erlebenswahrscheinlichkeit** λ_n derselben die Wahrscheinlichkeit, dafs dieselbe nach 1 Jahre noch am Leben ist.

Von L_n Personen leben nach einem Jahre noch L_{n+1}, es sterben daher innerhalb eines Jahres $T_n = L_n - L_{n+1}$.

Da die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses gleich ist der Anzahl der für das Eintreffen dieses Ereignisses günstigen Fälle dividiert durch die Anzahl aller gleich möglichen Fälle, folgt

$$\tau_n = \frac{T_n}{L_n} = \frac{L_n - L_{n+1}}{L_n}$$

für die Sterbenswahrscheinlichkeit und

$$\lambda_n = \frac{L_{n+1}}{L_n}$$

für die Erlebenswahrscheinlichkeit.

$$\lambda_n + \tau_n = \frac{L_{n+1}}{L_n} + \frac{L_n - L_{n+1}}{L_n} = 1,$$

was vorauszusehen war, da die Person nach Ablauf eines Jahres entweder schon gestorben oder noch am Leben sein mufs, und 1 in der Wahrscheinlichkeitsrechnung der Wert der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist, das unbedingt eintreten mufs.

Bezeichnet ferner λ_n^a die Wahrscheinlichkeit, dafs eine n-jährige Person nach a Jahren noch am Leben ist, so ist

die Anzahl der günstigen Fälle $= L_{n+a}$
" " aller möglichen " $= L_n$,

mithin

$$\lambda_n^a = \frac{L_{n+a}}{L_n}.$$

Ist weiter τ_n^a die Wahrscheinlichkeit, dafs eine n-jährige Person innerhalb der nächsten a Jahre stirbt, so ist analog

$$\tau_n^a = \frac{L_n - L_{n+a}}{L_n}.$$

Es ist auch hier:

$$\lambda_n^a + \tau_n^a = \frac{L_{n+a}}{L_n} + \frac{L_n - L_{n+a}}{L_n} = 1.$$

§ 4. Sterblichkeitstafeln.

Alter in Jahren	Anzahl der Lebenden				
	Tafel der 23 deutschen Gesellschaften für normale Leben mit vollständiger ärztlicher Untersuchung		Tafel der 17 englischen Gesellschaften	Brune's Tafel nach den Erfahrungen der preuss. allg. Witwen-Verpflegungs-Anstalt während der Zeit von 1776 bis 1845	
	Männer	Frauen		Männer	Frauen
20	100 000	100 000	93 268	—	9 392
21	99 376	98 853	92 588	9 260	9 260
22	98 760	97 695	91 905	9 202	9 136
23	98 154	96 538	91 219	9 144	9 019
24	97 539	95 411	90 529	9 085	8 908
25	96 919	94 311	89 835	9 025	8 802
26	96 285	93 237	89 137	8 964	8 700
27	95 642	92 181	88 434	8 903	8 600
28	94 982	91 140	87 726	8 842	8 501
29	94 306	90 105	87 012	8 780	8 402
30	93 607	89 080	86 292	8 717	8 304
31	92 886	88 054	85 565	8 653	8 207
32	92 142	87 038	84 831	8 587	8 110
33	91 378	86 020	84 089	8 518	8 014
34	90 590	85 006	83 339	8 445	7 918
35	89 778	83 992	82 581	8 369	7 823
36	88 941	82 979	81 814	8 291	7 729
37	88 081	81 967	81 038	8 210	7 636
38	87 191	80 964	80 253	8 125	7 543
39	86 270	79 965	79 458	8 036	7 451
40	85 318	78 970	78 653	7 943	7 361
41	84 330	77 985	77 838	7 847	7 273
42	83 301	77 003	77 012	7 749	7 187
43	82 232	76 034	76 173	7 649	7 102
44	81 122	75 078	75 316	7 546	7 018
45	79 976	74 128	74 435	7 440	6 934
46	78 797	73 176	73 526	7 330	6 849
47	77 591	72 219	72 582	7 216	6 762
48	76 352	71 239	71 601	7 097	6 674
49	75 077	70 230	70 580	6 973	6 584
50	73 755	69 194	69 517	6 845	6 492
51	72 365	68 130	68 409	6 714	6 397
52	70 907	67 036	67 253	6 579	6 299
53	69 378	65 910	66 046	6 440	6 197
54	67 777	64 746	64 785	6 296	6 090
55	66 103	63 533	63 469	6 147	5 976
56	64 362	62 254	62 094	5 992	5 853
57	62 550	60 898	60 658	5 830	5 722
58	60 667	59 463	59 161	5 662	5 583
59	58 711	57 947	57 600	5 487	5 437

Sterblichkeitstafeln.

Alter in Jahren	Anzahl der Lebenden				
	Tafel der 23 deutschen Gesellschaften für normale Leben mit vollständiger ärztlicher Untersuchung		Tafel der 17 englischen Gesellschaften	Brune's Tafel nach den Erfahrungen der preuss. allg. Witwen-Verpflegungs-Anstalt während der Zeit von 1776 bis 1845	
	Männer	Frauen		Männer	Frauen
60	56 692	56 338	55 973	5 304	5 286
61	54 601	54 640	54 275	5 112	5 130
62	52 453	52 863	52 505	4 910	4 969
63	50 256	50 998	50 661	4 699	4 802
64	48 016	49 056	48 744	4 481	4 627
65	45 733	47 055	46 754	4 258	4 442
66	43 408	44 973	44 693	4 032	4 246
67	41 036	42 798	42 565	3 804	4 038
68	38 615	40 549	40 374	3 573	3 819
69	36 163	38 206	38 128	3 338	3 591
70	33 695	35 763	35 837	3 100	3 356
71	31 221	33 248	33 510	2 859	3 117
72	28 757	30 692	31 159	2 617	2 877
73	26 324	28 114	28 797	2 374	2 637
74	23 925	25 545	26 439	2 132	2 398
75	21 576	23 020	24 100	1 895	2 163
76	19 288	20 549	21 797	1 677	1 935
77	17 088	18 169	19 548	1 457	1 718
78	14 997	15 877	17 369	1 269	1 516
79	13 019	13 748	15 277	1 103	1 330
80	11 167	11 800	13 290	954	1 159
81	9 425	10 010	11 424	817	1 000
82	7 809	8 375	9 694	689	849
83	6 348	6 913	8 112	568	706
84	5 075	5 598	6 685	454	575
85	3 998	4 429	5 417	350	461
86	3 106	3 448	4 306	261	366
87	2 394	2 652	3 348	187	289
88	1 829	2 023	2 537	127	228
89	1 382	—	1 864	80	180
90	—	—	1 319	46	141
91	—	—	892	24	108
92	—	—	570	11	80
93	—	—	339	4	57
94	—	—	184	1	38
95	—	—	89	—	24
96	—	—	37	—	14
97	—	—	13	—	7
98	—	—	4	—	3
99	—	—	1	—	1

Zweiter Abschnitt.

Versicherung einfacher Leben.

Erstes Kapitel.

Einmal-Prämien der Erlebens- und Rentenversicherung.

---

§ 5. Erlebensversicherung.

Will eine x-jährige Person einen Betrag ${}^aE_x$ erlegen, damit ihr nach a Jahren, falls sie in diesem Zeitpunkte noch lebt, der Betrag 1 ausbezahlt werde, so nennen wir dies eine Erlebensversicherung und ${}^aE_x$ den gegenwärtigen Wert oder die Einmal-Prämie der Erlebensversicherung.

Müfste der Betrag 1 nach a Jahren unbedingt zur Auszahlung gelangen, so wäre der gegenwärtige oder diskontierte Wert dieser Zahlung $\frac{1}{r^a}$; da jedoch der Betrag 1 nur in dem Falle ausbezahlt wird, wenn die jetzt x-jährige Person nach a Jahren, d. i. im Alter von $(x+a)$ noch lebt und die Wahrscheinlichkeit hiefür $\frac{L_{x+a}}{L_x}$ ist, so mufs $\frac{1}{r^a}$ noch mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{L_{x+a}}{L_x}$ multipliziert werden; es ist daher

$$ {}^aE_x = \frac{1}{r^a}\frac{L_{x+a}}{L_x} = \frac{\frac{L_{x+a}}{r^a}}{L^x} = \frac{\frac{L_{x+a}}{r^{x+a}}}{\frac{L^x}{r^x}}. $$

Führen wir ferner die Bezeichnung ein:

$$\frac{L_x}{r^x} = DL_x, \text{ also auch } \frac{L_{x+a}}{r^{x+a}} = DL_{x+a},$$

wo das D nicht als Faktor, sondern als ein Operations- oder Funktionszeichen anzusehen ist, so ergiebt sich:

$$^aE_x = \frac{DL_{x+a}}{DL_x} \qquad 1)$$

Wir nennen $\frac{L_x}{r^x} = DL_x$ die diskontierte Anzahl der Lebenden und werden sie in der Folge Kürze halber auch häufig blofs mit D_x bezeichnen, so dafs $D_x = DL_x = \frac{L_x}{r^x}$.

Wir hätten zu Formel 1) auch auf folgendem elementaren Wege gelangen können:

Wollen sämtliche L_x Personen des Alters x eine Erlebensversicherung auf den Betrag 1, zahlbar nach a Jahren, eingehen, so gelangt nach a Jahren der Betrag L_{x+a} zur Auszahlung, da von den L_x Personen nach a Jahren nur mehr L_{x+a} Personen am Leben sind. Der gegenwärtige Wert dieser Zahlung beträgt

$$\frac{L_{x+a}}{r^a}$$

und da jede der versicherten L_x Personen den L_x-ten Teil dieses Betrages als Prämie zu zahlen hat, ist die Einmal-Prämie der Erlebensversicherung, wie bereits gefunden:

$$^aE_x = \frac{1}{L_x} \cdot \frac{L_{x+a}}{r^a} = \frac{\frac{L_{x+a}}{r^{x+a}}}{\frac{L_x}{r^x}} = \frac{DL_{x+a}}{DL_x} = \frac{D_{x+a}}{D_x}.$$

---

§ 6. Leibrenten.

Bezeichnen wir mit R_x den gegenwärtigen Wert oder die Einmal-Prämie der vorschüssigen Leibrente eines x-jährigen, d. h. einer sofort beginnenden, zu Beginn eines jeden Jahres, solange der Versicherte lebt, im Betrage 1 zahlbaren Rente, so können wir uns vorstellen, dafs der

Versicherte mehrere Erlebensversicherungen eingeht, von denen die 1. sofort, die 2. nach 1 Jahre, die 3. nach 2 Jahren u. s. f. nach jedem weiteren Jahre, solange der Versicherte noch am Leben ist, im jedesmaligen Betrage 1 zahlbar ist.

Demnach

$$R_x = 1 + {}^1E_x + {}^2E_x + {}^3E_x + \ldots + {}^{(\omega - x)}E_x.$$

Da allgemein

$${}^aE_x = \frac{D_{x+a}}{D_x}$$

folgt:

$$R_x = 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \frac{D_{x+3}}{D_x} + \ldots + \frac{D_\omega}{D_x}$$

$$R_x = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots + D_\omega}{D_x},$$

wo die Summierung der diskontierten Zahlen der Lebenden bis zum höchsten in der Sterblichkeitstafel vorkommender Alter ω fortzusetzen ist.

Wir führen Kürze halber die Bezeichnung ein:

$$\Sigma D_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_\omega \qquad 1)$$

und nennen ΣD_x die Summe der diskontierten Zahlen der Lebenden vom Alter x, und erhalten nun

$$R_x = \frac{\Sigma D_x}{D_x} \qquad 2)$$

Soll die Leibrente eine dekursive sein, so fällt blofs die sofortige Zahlung 1 weg und wir erhalten als Einmal-Prämie ${}_{(1)}R_x$ der dekursiven Leibrente eines x-jährigen

$${}_{(1)}R_x = R_x - 1 = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_\omega}{D_x} - 1$$

oder

$${}_{(1)}R_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_\omega}{D_x}$$

und da in analoger Bezeichnung zu 1)

$$D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots + D_\omega = \Sigma D_{x+1}$$

folgt:

$${}_{(1)}R_x = \frac{\Sigma D_{x+1}}{D_x} \qquad 3)$$

---

§ 7. Selbständige Ableitung der Einmal-Prämie für die Leibrente.

Bei der anticipativen Leibrente soll

der Betrag 1 sofort, dann
„ „ 1 nach 1 Jahre,
„ „ 1 „ 2 Jahren,
„ „ 1 „ 3 „ u. s. f.

solange gezahlt werden, als der Versicherte noch am Leben ist.

Würden diese Beträge unbedingt ausbezahlt werden, ohne Rücksicht darauf, ob der sich im Alter x Versichernde nach 1, 2, 3 ... Jahren noch am Leben ist, so wäre der gegenwärtige Wert dieser auf einander folgenden Zahlungen: $1, \frac{1}{r}, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^3} \ldots$

Diese Werte müssen jedoch noch mit der Wahrscheinlichkeit des x-jährigen, nach 1, 2, 3 ... Jahren noch am Leben zu sein, d. i. mit den Werten

$$\frac{L_{x+1}}{L_x}, \frac{L_{x+2}}{L_x}, \frac{L_{x+3}}{L_x} \ldots$$

multipliziert werden und wir erhalten für die anticipative oder vorschüssige Leibrente:

$$R_x = 1 + \frac{L_{x+1}}{L_x} \cdot \frac{1}{r} + \frac{L_{x+2}}{L_x} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{L_{x+3}}{L_x} \cdot \frac{1}{r^3} + \ldots \quad 1)$$

bis an's Ende der Tafel, und da allgemein:

$$\frac{L_{x+k}}{L_x} \frac{1}{r^k} = \frac{\frac{L_{x+k}}{r^k}}{L_x} = \frac{\frac{L_{x+k}}{r^{x+k}}}{\frac{L_x}{r^x}} = \frac{D_{x+k}}{D_x}$$

$$R_x = 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \ldots \quad 2)$$

oder

$$R_x = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots}{D_x} \quad 3)$$

$$R_x = \frac{\Sigma D_x}{D_x}. \quad 4)$$

Bei der dekursiven oder nachschüssigen Leibrente fällt die sofortige Zahlung des Betrages 1 weg, die Formel 1) geht daher über in

$$_{(1)}R_x = \frac{L_{x+1}}{L_x}\frac{1}{r} + \frac{L_{x+2}}{L_x}\frac{1}{r^2} + \frac{L_{x+3}}{L_x}\frac{1}{r^3} + \dots \qquad 5)$$

oder

$$_{(1)}R_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \dots}{D_x} \qquad 6)$$

$$_{(1)}R_x = \frac{\Sigma D_{x+1}}{D_x} \qquad 7)$$

oder

$$_{(1)}R_x = R_x - 1. \qquad 8)$$

§ 8. Berechnung einer Rententafel.

Die Berechnung der Einmal-Prämie für die anticipative Leibrente nach der Formel: $R_x = \frac{\Sigma D_x}{D_x}$ ist aus der nachstehenden Tafel, die man auch Grundtafel nennt, da dieselbe auch für die später vorkommenden Versicherungsarten mit Vorteil verwendet werden kann, ersichtlich.

Wir wählen hierbei als Beispiel die Tafel der 23 deutschen Gesellschaften für Männer und den Zinsfuſs von 3%, $r = 1{\cdot}03$.

Die Potenzen des Diskontierungsfaktors können einer Zinseszins-Tabelle entnommen werden.

§ 9. Grundtafel zur Berechnung der Leibrenten.

x	L_x	$\frac{1}{r^x}$	$D_x = L_x \frac{1}{r^x}$	ΣD_x	$R_x = \frac{\Sigma D_x}{D_x}$
1	2	3	4	5	6
89	1 382	0·072 0256	99·5393	99·5393	1
88	1 829	0·074 1864	135·6868	235·2261	1·7336
87	2 394	0·076 4120	182·9303	418·1564	2·2859
86	3 106	0·078 7043	244·4555	662·6119	2·7106
85	3 998	0·081 0655	324·0999	986·7148	3·0445
84	5 075	0·083 4974	423·7493	1410·4611	3·3285
83	6 348	0·086 0024	545·9432	1956·4043	3·5835
82	7 809	0·088 5824	691·7399	2648·1442	3·8282
81	9 425	0·091 2399	859·9361	3508·0803	4·0795
80	11 167	0·093 9771	1049·441	4557·521	4·3428
.	.	.	.	.	.

Die Berechnung der einzelnen Kolonnen ergiebt sich unmittelbar aus der Tabelle.

Bezüglich der Kolonne 5 ist zu bemerken:

Da $\Sigma D_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_\omega$

und

$\Sigma D_{x+1} = \quad D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_\omega$

folgt:

$$\Sigma D_x = \Sigma D_{x+1} + D_x \qquad 1)$$

Für das höchste Alter ω (hier ist $\omega = 89$) ist $\Sigma D_\omega = D_\omega = D_{89} = 99{\cdot}5393$, mithin

$\Sigma D_{88} = \Sigma D_{89} + D_{88} = \ 99{\cdot}5393 + 135{\cdot}6868 = 235{\cdot}2261$
$\Sigma D_{87} = \Sigma D_{88} + D_{87} = 235{\cdot}2261 + 182{\cdot}9303 = 418{\cdot}1564$

Die Summe der diskontierten Zahlen für irgend ein Alter n erhält man daher durch Addition der diskontierten Zahlen dieses Alters und der Summe der diskontierten Zahlen des nächst höheren Alters.

Die Werte von D_x (4. Kolonne) können durch abgekürzte Multiplikation aus den Werten von L_x (2. Kolonne) und $\frac{1}{r^x}$ (3. Kolonne), die Werte von R_x (6. Kolonne) durch abgekürzte Division von ΣD_x (5. Kolonne) durch D_x (4. Kolonne) gewonnen werden.

Bequemer gestaltet sich die Rechnung logarithmisch nach dem Schema auf Seite 14 und 15. Auf 8 Decimalstellen genau ist

$$\log r = \log 1{\cdot}03 = 0{\cdot}012\ \ 837\,22$$

und $$\log \frac{1}{r} = \log \frac{1}{1{\cdot}03} = 0{\cdot}987\ \ 162\,78 - 1$$

Da die dekursive Leibrente stets um 1 kleiner ist, als die entsprechende anticipative Leibrente, so erhalten wir:

$_{(1)}R_{89} = 0$	$_{(1)}R_{85} = 2{\cdot}0445$	$_{(1)}R_{81} = 3{\cdot}0795$
$_{(1)}R_{88} = 0{\cdot}7336$	$_{(1)}R_{84} = 2{\cdot}3285$	$_{(1)}R_{80} = 3{\cdot}3428$ u. s. f.,
$_{(1)}R_{87} = 1{\cdot}2859$	$_{(1)}R_{83} = 2{\cdot}5835$	allgemein
$_{(1)}R_{86} = 1{\cdot}7106$	$_{(1)}R_{82} = 2{\cdot}8282$	$_{(1)}R_x = R_x - 1$

Zur direkten Berechnung der dekursiven Leibrente hätten wir das Schema auf Seite 16

x	L_x	$\log L_x$	$\log \frac{1}{r^x} = x \log \frac{1}{r}$	$\log D_x = \log L_x + x \log \frac{1}{r}$	D_x	ΣD_x	$\log \Sigma D_x$	$\log R_x = \log \Sigma D_x - \log D_x$	R_x
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
89	1 382	3·140 508	0·857 487−2	1·997 995	99·5394	99·5394	1·997 995	0 000 000	1·0000
88	1 829	262 214	870 325	2 132 539	135·687	235·226	2·371 485	238 946	1·7336
87	2 394	379 124	883 162	262 286	182·930	418·156	621 338	359 052	2 2859
86	3 106	492 201	895 999	388 200	244·456	662·612	821 259	433 059	2·7106
85	3 998	601 843	908 836	510 679	324 100	986·712	994 191	483 512	3 0445
84	5 075	705 436	921 674	627 110	423·75	1 410·46	3·149 361	522 251	3·3285
83	6 348	802 637	934 511	737 148	545·94	1 956·40	291 458	554 310	3·5835
82	7 809	892 595	947 348	839 943	691·74	2 648·14	422 941	582 998	3·8282
81	9 425	974 281	960 185	934 466	859·94	3 508·08	545 070	610 604	4·0795
80	11 167	4·047 937	973 022	3·020 959	1049·44	4 557·52	658 729	637 770	4·3428
79	13 019	114 578	985 860	100 438	1260·20	5 817·72	764 753	664 315	4·6165
78	14 997	176 004	998 697	174 701	1495·21	7 312·93	864 092	689 391	4·8909
77	17 088	232 691	0·011 534−1	244 225	1754·79	9 067·72	957 498	713 273	5·1674
76	19 288	285 287	024 371	309 658	2040·13	11 107·85	4·045 630	735 972	5·4447
75	21 576	333 971	037 208	371 179	2350·6	13 458·5	128 997	757 818	5·7256
74	23 925	378 852	050 046	428 898	2684·7	16 143·2	207 989	779 091	6·0130
73	26 324	420 352	062 883	483 235	3042·5	19 185·7	282 977	799 742	6 3058
72	28 757	458 744	075 720	534 464	3423·4	22 609·1	354 283	819 819	6 6042
71	31 221	494 447	088 557	583 004	3828·3	26 437·4	422 219	839 215	6·9058
70	33 695	527 565	101 395	628 960	4255·6	30 693 0	487 039	858 079	7·2124
69	36 163	558 264	114 232	672 496	4704·3	35 397·3	548 970	876 474	7·5244
68	38 615	586 756	127 069	713 825	5174·0	40 571·3	608 219	894 394	7·8414
67	41 036	613 165	139 906	753 071	5663·3	46 234·6	664 967	911 896	8·1639

x	L_x	$\log L_x$	$\log \frac{1}{r^x} = x \log \frac{1}{r}$	$\log D_x = \log L_x + x \log \frac{1}{r}$	D_x	ΣD_x	$\log \Sigma D_x$	$\log R_x = \log \Sigma D_x - \log D_x$	R_x
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
						46 234·6			
66	43 408	4·637 570	0·152 743−1	3·790 313	6 170·4	52 405·0	4·719 373	0·929 060	8·4930
65	45 733	660 230	165 581	825 811	6 695·9	59 100·9	771 594	945 783	8·8264
64	48 016	681 386	178 418	859 804	7 241·1	66 342·0	821 789	961 985	9·1619
63	50 256	701 188	191 255	892 443	7 806·3	74 148·3	870 101	977 658	9·4986
62	52 453	719 770	204 092	923 862	8 391·9	82 540·2	916 665	992 803	9·8357
61	54 601	737 201	216 930	954 131	8 997·7	91 537 9	961 601	1·007 470	10·1735
60	56 692	753 522	229 767	983 289	9 622·5	101 160·4	5·005 011	021 722	10·5129
59	58 711	768 719	242 604	4·011 323	10 264	111 424	046 979	035 656	10·8557
58	60 667	782 953	255 441	038 394	10 924	122 348	087 597	049 203	11·1996
57	62 550	796 227	268 278	064 505	11 601	133 949	126 940	062 435	11·5461
56	64 362	808 630	281 116	089 746	12 295	146 244	165 078	075 332	11·8941
55	66 103	820 221	293 953	116 174	13 067	159 311	202 246	086 072	12·1919
54	67 777	831 082	306 790	137 872	13 736	173 047	238 165	100 293	12·5977
53	69 378	841 222	319 627	160 849	14 483	187 530	273 071	112 222	12·9486
52	70 907	850 689	332 465	183 154	15 246	202 776	307 017	123 863	13·3003
51	72 365	859 529	345 302	204 831	16 026	218 802	340 051	135 220	13·6528
50	73 755	867 791	358 139	225 930	16 824	235 626	372 223	146 293	14·0053
49	75 077	875 507	370 976	246 483	17 639	253 265	403 576	157 093	14·3580
48	76 352	882 820	383 813	266 633	18 477	271 742	434 157	167 524	14·7070
47	77 591	889 811	396 651	286 462	19 340	291 082	464 015	177 553	15·0506
46	78 797	896 510	409 488	305 998	20 230	311 312	493 196	187 198	15·3886
45	79 976	902 960	422 325	325 285	21 149	332 461	521 740	196 455	15·7201
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

x	L_x	$\frac{1}{r^x}$	$D_x = L_x \frac{1}{r^x}$	ΣD_{x+1}	$(1) R_x = \frac{\Sigma D_{x+1}}{D_x}$
1	2	3	4	5	6
89	1 382	0.072 0256	99·5393	0	0
88	1 829	0.074 1864	135·6868	99·5393	0·7336
87	2 394	0.076 4120	182·9303	235·2261	1·2859
.	.	.	.	.	.

§ 10. Rekursionsformel zur Berechnung der Leibrenten.

Die vorschüssige Leibrente für einen x-jährigen besteht aus dem sofort zahlbaren Betrage 1 und der vom nächsten Jahre ab fälligen Leibrente; da jedoch der x-jährige nur dann in den Genufs der Leibrente für einen $(x+1)$-jährigen tritt, wenn er nach 1 Jahre noch lebt, können wir uns vorstellen, der x-jährige gehe eine Versicherung auf einen Betrag R_{x+1} ein, der gezahlt wird, falls der Versicherte nach 1 Jahre noch lebt.

Die Prämie eines x-jährigen für eine Erlebensversicherung im Betrage 1 und die Aufschubszeit eines Jahres beträgt ${}^1E_x$, mithin für eine Erlebensversicherung im Betrage R_{x+1} und die Aufschubszeit eines Jahres: ${}^1E_x R_{x+1}$.

Um daher eine vorschüssige Leibrente zu erwerben, mufs der x-jährige: $1 + {}^1E_x R_{x+1}$ erlegen, d. h.

$$R_x = 1 + {}^1E_x R_{x+1} \tag{1}$$

oder, da ${}^1E_x = \frac{D_{x+1}}{D_x}$, auch

$$R_x = 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} R_{x+1} \tag{2}$$

Zur Formel 2) gelangen wir auch auf folgendem Wege: Da $\Sigma D_x = D_x + \Sigma D_{x+1}$, folgt aus $R_x = \frac{\Sigma D_x}{D_x}$ auch:

$$R_x = \frac{D_x + \Sigma D_{x+1}}{D_x} = 1 + \frac{\Sigma D_{x+1}}{D_x}$$

$$= 1 + \frac{\Sigma D_{x+1}}{D_x} \cdot \frac{D_{x+1}}{D_{x+1}} = 1 + \frac{\Sigma D_{x+1}}{D_{x+1}} \cdot \frac{D_{x+1}}{D_x}$$

und wegen

$$R_{x+1} = \frac{\Sigma D_{x+1}}{D_{x+1}}$$

auch übereinstimmend mit 2)

$$R_x = 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} R_{x+1}.$$

Da ferner

$$\frac{D_{x+1}}{D_x} = \frac{\frac{L_{x+1}}{r^{x+1}}}{\frac{L_x}{r^x}} = \frac{L_{x+1}}{r L_x}$$

erhalten wir auch aus 2)

$$R_x = 1 + \frac{L_{x+1}}{r L_x} R_{x+1}. \qquad 3)$$

Formel 3) kann dazu benützt werden, um die Leibrente für irgend ein Alter aus der Rente für das nächst höhere Alter zu berechnen.

Der Wert der vorschüssigen Leibrente für das höchste Alter der Sterbetafel, z. B. das Alter 89 in der Tafel der 23 deutschen Gesellschaften für Männer ist stets 1; denn da sämtliche 1382 Personen des Alters 89 vor Erreichen des Alters 90 sterben, besteht die Leibrente des 89-jährigen nur in der einmaligen Zahlung des Betrages 1.

Es ist daher $R_{89} = 1$

$$R_{88} = 1 + \frac{L_{89}}{r . L_{88}} R_{89} = 1 + \frac{1382}{1{\cdot}03 . 1829} \cdot 1 = 1 + \frac{1382}{1883{\cdot}87}$$
$$= 1{\cdot}733597$$

$$R_{87} = 1 + \frac{L_{88}}{r . L_{87}} R_{88} = 1 + \frac{1829 . 1{\cdot}733597}{1{\cdot}03 . 2394}$$
$$= 1 + \frac{3170{\cdot}749}{2465{\cdot}82} = 1 + 1{\cdot}28588 = 2{\cdot}28588$$

Zur logarithmischen Berechnung der Leibrenten nach der Rekursionsformel 3) würden wir uns des folgenden Schema's bedienen:

x	L_x	$\log L_x$	$\log (r L_x)$	$\log \left(\frac{L_{x+1}}{r L_x}\right)$	R_{x+1}
1	2	3	4	5	6
89	1 382	3·140 508	—	—	—
88	1 829	3·262 214	3·275 051	0·865 457—1	1
87	2 394	3·379 124	3·391 961	0·870 253—1	1·733 597
86	3 106	3·492 201	3·505 038	0·874 086—1	2·285 882
.	.	.	.	.	.

Auf ähnliche Weise, wie für die vorschüssige Leibrente, können wir auch die Rekursionsformel für die nachschüssige Leibrente ableiten.

Wenn eine gegenwärtig x-jährige Person am Ende des 1. Jahres, also nach einem Jahre, den Betrag 1 und aufserdem den Wert der nachschüssigen Leibrente für eine $(x+1)$-jährige Person ${}_{(1)}R_{x+1}$ erhält, so kommt dies einer nachschüssigen Leibrente für eine x-jährige Person gleich.

Um jedoch nach 1 Jahre, falls er noch am Leben ist, den Betrag $(1 + {}_{(1)}R_{x+1})$ zu erhalten, mufs der x-jährige gegenwärtig den Betrag ${}^1E_x (1 + {}_{(1)}R_{x+1})$ erlegen; es ist also

$$ {}_{(1)}R_x = (1 + {}_{(1)}R_{x+1})\, {}^1E_x \qquad 4) $$

oder

$$ {}_{(1)}R_x = (1 + {}_{(1)}R_{x+1}) \frac{D_{x+1}}{D_x} \qquad 5) $$

oder endlich wegen $\frac{D_{x+1}}{D_x} = \frac{L_{x+1}}{r L_x}$

$$ {}_{(1)}R_x = (1 + {}_{(1)}R_{x+1}) \frac{L_{x+1}}{r L_x} \qquad 6) $$

Formel 6) kann nun in ähnlicher Weise wie Formel 3) als Rekursionsformel zur Berechnung der nachschüssigen Leibrente aus der nachschüssigen Leibrente des nächst höheren Alters verwendet werden.

Für das höchste Alter ω der Sterblichkeitstafel ist ${}_{(1)}R_{\omega} = 0$, da eine Rentenzahlung am Ende des Jahres nicht stattfinden kann.

$\log R_{x+1}$	$\log\left(\frac{L_{x+1} R_{x+1}}{r L_x}\right)$	$\frac{L_{x+1} R_{x+1}}{r L_x}$	$R_x = 1 + \frac{L_{x+1} R_{x+1}}{r L_x}$
7	8	9	10
—	—	—	1·000 000
0	0·865 457—1	0·733 597	1·733 597
0·238 948	0·109 201	1·285 882	2·285 882
0·359 054	0·233 140	1·710 568	2·710 568
.	.	.	.

Formel 5) erhält man auch aus:

$$_{(1)}R_x = \frac{\Sigma D_{x+1}}{D_x} = \frac{\Sigma D_{x+1}}{D_{x+1}} \cdot \frac{D_{x+1}}{D_x}$$

$$= \frac{D_{x+1} + \Sigma D_{x+2}}{D_{x+1}} \cdot \frac{D_{x+1}}{D_x} = \left(1 + \frac{\Sigma D_{x+2}}{D_{x+1}}\right) \frac{D_{x+1}}{D_x}$$

und wegen: $_{(1)}R_{x+1} = \frac{\Sigma D_{x+2}}{D_{x+1}}$ auch

$$_{(1)}R_x = (1 + {}_{(1)}R_{x+1}) \frac{D_{x+1}}{D_x}.$$

§ 11. Aufgeschobene Leibrente.

Soll der Rentenbezug nicht sofort, sondern erst zu Beginn des 2., 3., 4. . . . . $(a + 1)$-ten Jahres beginnen, so heifst die Rente eine um 1, 2, 3 . . . . a Jahre aufgeschobene vorschüssige Leibrente; wir bezeichnen dieselbe mit $^{a}\overline{R}_x$, wo x das Alter des Versicherten zur Zeit des Abschlusses der Versicherung und a die Aufschubszeit bezeichnet.

Ebenso sprechen wir von einer um 1, 2, 3, . . . a Jahre aufgeschobenen nachschüssigen Leibrente, falls der Rentenbezug erst am Ende des 2., 3., 4., . . . $(a + 1)$-ten Jahres beginnt und bezeichnen dieselbe analog mit $_{(1)}^{a}\overline{R}_x$.

Um den Wert der um a Jahre aufgeschobenen vorschüssigen Leibrente für eine x-jährige Person zu finden, stellen wir uns vor, der Versicherte gehe eine Erlebensversicherung auf einen Betrag ein, der nach a Jahren, falls der Versicherte zu dieser Zeit noch lebt, ausbezahlt werden soll; die Höhe des versicherten Betrages sei gleich dem Werte der nach a Jahren, d. i. im Alter $(x + a)$ des Versicherten beginnenden Leibrente R_{x+a}.

Es ist mithin

$$ {}^{a}\overline{R}_x = {}^{a}E_x \, R_{x+a} \qquad 1) $$

und wegen

$$ {}^{a}E_x = \frac{D_{x+a}}{D_x} $$

auch

$$ {}^{a}\overline{R}_x = \frac{D_{x+a}}{D_x} R_{x+a}. \qquad 2) $$

Analog ist die um a Jahre aufgeschobene nachschüssige Leibrente für einen x-jährigen gleich einer Erlebensversicherung mit der Aufschubszeit a im Betrage ${}_{(1)}R_{x+a}$, mithin

$$ {}^{a}_{(1)}\overline{R}_x = {}^{a}E_x \, {}_{(1)}R_{x+a} \qquad 3) $$

oder

$$ {}^{a}_{(1)}\overline{R}_x = \frac{D_{x+a}}{D_x} \, {}_{(1)}R_{x+a} \qquad 4) $$

Aus 1) folgt ferner:

$$ {}^{a}\overline{R}_x = \frac{D_{x+a}}{D_x} \cdot \frac{\Sigma D_{x+a}}{D_{x+a}} $$

$$ {}^{a}\overline{R}_x = \frac{\Sigma D_{x+a}}{D_x}. \qquad 5) $$

Ebenso aus 4)

$$ {}^{a}_{(1)}\overline{R}_x = \frac{D_{x+a}}{D_x} \, \frac{\Sigma D_{x+a+1}}{D_{x+a}} $$

oder

$$ {}^{a}_{(1)}\overline{R}_x = \frac{\Sigma D_{x+a+1}}{D_x}. \qquad 6) $$

Zu der Formel 5) gelangen wir auch, wenn wir bei der vorschüssigen Leibrente die ersten a Zahlungen, also die zu Beginn des 1., 2., 3. . . . a-ten Jahres fälligen Zahlungen im gegenwärtigen Werte:

$$ 1, \frac{L_{x+1}}{L_x} \cdot \frac{1}{r}, \frac{L_{x+2}}{L_x} \cdot \frac{1}{r^2}, \ldots \frac{L_{x+a-1}}{L_x} \cdot \frac{1}{r^{a-1}} $$

ausfallen lassen.

Die lebenslängliche Leibrente

$$R_x = 1 + \frac{L_{x+1}}{L_x} \cdot \frac{1}{r} + \frac{L_{x+2}}{L_x} \cdot \frac{1}{r^2} + \ldots$$

geht dann über in die aufgeschobene Leibrente

$$^{a}\overline{R}_x = \frac{L_{x+a}}{L_x} \cdot \frac{1}{r^a} + \frac{L_{x+a+1}}{L_x} \cdot \frac{1}{r^{a+1}} + \frac{L_{x+a+2}}{L_x} \frac{1}{r^{a+2}} + \ldots$$

und da

$$\frac{L_{x+k}}{L_x} \cdot \frac{1}{r^k} = \frac{\frac{L_{x+k}}{r^{x+k}}}{\frac{L_x}{r^x}} = \frac{D_{x+k}}{D_x}$$

$$^{a}\overline{R}_x = \frac{D_{x+a}}{D_x} + \frac{D_{x+a+1}}{D_x} + \frac{D_{x+a+2}}{D_x} + \ldots$$

oder

$$^{a}\overline{R}_x = \frac{D_{x+a} + D_{x+a+1} + D_{x+a+2} + \ldots}{D_x}$$

$$^{a}\overline{R}_x = \frac{\Sigma D_{x+a}}{D_x}$$

übereinstimmend mit Formel 5).

Ebenso ist

$$_{(1)}^{a}\overline{R}_x = \frac{L_{x+a+1}}{L_x} \frac{1}{r^{a+1}} + \frac{L_{x+a+2}}{L_x} \frac{1}{r^{a+2}} + \ldots$$

$$_{(1)}^{a}\overline{R}_x = \frac{D_{x+a+1}}{D_x} + \frac{D_{x+a+2}}{D_x} + \ldots = \frac{\Sigma D_{x+a+1}}{D_x}$$

übereinstimmend mit Formel 6).

Aus Formel 5) erhalten wir für $a = 1$

$$^{1}\overline{R}_x = \frac{\Sigma D_{x+1}}{D_x}$$

und da auch

$$_{(1)}R_x = \frac{\Sigma D_{x+1}}{D_x}$$

folgt

$$_{(1)}R_x = {}^{1}\overline{R}_x$$

d. h. die nachschüssige Leibrente ist mit der um 1 Jahr aufgeschobenen vorschüssigen Leibrente identisch.

Tabelle zur Berechnung aufgeschobener Leibrenten nach der Formel: $^{a}\overline{R}_x = \frac{\Sigma D_{x+a}}{D_x}$

x	$\log D_x$	$\log \Sigma D_{x+1}$	$\log \Sigma D_{x+2}$	$\log \Sigma D_{x+3}$	$\log \Sigma D_{x+4}$	$\log \Sigma D_{x+5}$	$\log \Sigma D_{x+6}$	$\log {}^{1}\overline{R}_x = \log \Sigma D_{x+1} - \log D_x$	$\log {}^{2}\overline{R}_x = \log \Sigma D_{x+2} - \log D_x$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
45	4·325 285	5·493 196	5·464 015	5·434 157	5·403 576	5·372 223	5·340 051	1·167 911	1·138 730
46	305 998	464 015	434 157	403 576	372 223	340 051	307 017	158 017	128 159
47	286 462	434 157	403 576	372 223	340 051	307 017	273 071	147 695	117 114
48	266 633	403 576	372 223	340 051	307 017	273 071	238 165	136 943	105 590
49	246 483	372 223	340 051	307 017	273 071	238 165	202 246	125 740	093 568
50	225 930	340 051	307 017	273 071	238 165	202 246	165 078	114 121	081 087
51	204 831	307 017	273 071	238 165	202 246	165 078	126 940	102 186	068 240
52	183 154	273 071	238 165	202 246	165 078	126 940	087 597	089 917	055 011
53	160 849	238 165	202 246	165 078	126 940	087 597	046 979	077 316	041 397
54	137 872	202 246	165 078	126 940	087 597	046 979	005 011	064 374	027 206
55	116 174	165 078	126 940	087 597	046 979	005 011	4·961 601	048 904	010 766
56	089 746	126 940	087 597	046 979	005 011	4·961 601	916 665	037 193	0·997 851
57	064 505	087 597	046 979	005 011	4·961 601	916 665	870 101	023 092	982 474
58	038 394	046 979	005 011	4·961 601	916 665	870 101	821 789	008 585	966 617
59	011 323	005 011	4·961 601	916 665	870 101	821 789	771 594	0·993 688	950 278
60	3·983 289	4·961 601	916 665	870 101	821 789	771 594	719 373	978 812	933 376
61	954 131	916 665	870 101	821 789	771 594	719 373	664 967	962 534	915 970
62	923 862	870 101	821 789	771 594	719 373	664 967	608 219	946 239	897 927
63	892 443	821 789	771 594	719 373	664 967	608 219	548 970	929 346	879 151
64	859 804	771 594	719 373	664 967	608 219	548 970	487 039	911 790	859 569
65	825 811	719 373	664 967	608 219	548 970	487 039	422 219	893 562	839 156
66	790 313	664 967	608 219	548 970	487 039	422 219	354 283	874 654	817 906

Tabelle zur Berechnung aufgeschobener Leibrenten nach der Formel: ${}^{a}\overline{R}_x = \frac{\Sigma D_{x+a}}{D_x}$

$\log {}^{3}\overline{R}_x = \log \Sigma D_{x+3} - \log D_x$	$\log {}^{4}\overline{R}_x = \log \Sigma D_{x+4} - \log D_x$	$\log {}^{5}\overline{R}_x = \log \Sigma D_{x+5} - \log D_x$	$\log {}^{6}\overline{R}_x = \log \Sigma D_{x+6} - \log D_x$	${}^{1}\overline{R}_x = \frac{\Sigma D_{x+1}}{D_x}$	${}^{2}\overline{R}_x = \frac{\Sigma D_{x+2}}{D_x}$	${}^{3}\overline{R}_x = \frac{\Sigma D_{x+3}}{D_x}$	${}^{4}\overline{R}_x = \frac{\Sigma D_{x+4}}{D_x}$	${}^{5}\overline{R}_x = \frac{\Sigma D_{x+5}}{D_x}$	${}^{6}\overline{R}_x = \frac{\Sigma D_{x+6}}{D_x}$	x
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1·108 872	1·078 291	1·046 938	1·014 766	14·7201	13·7635	12·8491	11·9754	11·1414	10·3459	45
097 578	066 225	034 053	001 019	14·3886	13·4326	12·5192	11·6473	10·8156	10·0235	46
085 761	053 589	020 555	0·986 609	14·0506	13·0952	12·1832	11·3133	10·4847	9·6964	47
073 418	040 384	006 438	971 532	13·7070	12·7524	11·8418	10·9745	10·1493	9·3655	48
060 534	026 588	0·991 682	955 763	13·3580	12·4042	11·4957	10·6313	9·8103	9·0316	49
047 141	012 235	976 316	939 148	13·0053	12·0528	11·1466	10·2857	9·4693	8·6926	50
033 334	0·997 415	960 247	922 109	12·6528	11·7015	10·7978	9·9406	9·1253	8·3581	51
019 092	981 924	943 786	904 443	12·3003	11·3504	10·4494	9·5923	8·7859	8·0250	52
004 229	966 091	926 748	886 130	11·9486	11·0001	10·0979	9·2489	8·4479	7·6936	53
0·989 068	949 725	909 107	867 139	11·5978	10·6465	9·7514	8·9069	8·1116	7·3644	54
971 423	930 805	888 837	845 427	11·1919	10·2510	9·3632	8·5272	7·7417	7·0053	55
957 233	915 265	871 855	826 919	10·8941	9·9506	9·0622	8·2274	7·4448	6·7130	56
940 506	897 096	852 160	805 596	10·5461	9·6045	8·7198	7·8903	7·1147	6·3914	57
923 207	878 271	831 707	783 395	10·1996	9·2601	8·3793	7·5556	6·7875	6·0729	58
905 342	858 778	810 466	760 271	9·8557	8·9182	8·0416	7·2240	6·4635	5·7580	59
886 812	838 500	788 305	736 084	9·5129	8·5778	7·7057	6·8945	6·1419	5·4461	60
867 658	817 463	765 242	710 836	9·1735	8·2408	7·3732	6·5684	5·8243	5·1385	61
847 732	795 511	741 105	684 357	8·8357	7·9055	7·0426	6·2447	5·5094	4·8346	62
826 930	772 524	715 776	656 527	8·4986	7·5710	6·7132	5·9228	5·1973	4.5345	63
805 163	748 415	689 166	627 235	8·1619	7·2372	6·3850	5·6029	4·8884	4·2387	64
782 408	723 159	661 228	596 408	7·8264	6·9049	6·0591	5·2864	4·5838	3·9483	65
758 657	696 726	631 906	563 970	7·4930	6·5752	5·7366	4·9742	4·2846	3·6641	66

Die Werte für log D_x, log ΣD_{x+1}, log $\Sigma D_{x+2} \ldots$ log ΣD_{x+6} in vorstehender Tabelle wurden der Grundtafel zur Berechnung der Leibrenten (§ 9) entnommen.

---

§ 12. Kurze oder temporäre Leibrente.

Soll die Rente nicht lebenslänglich, sondern nur d Jahre hindurch im jedesmaligen Betrage 1 gezahlt werden, so erhalten wir die temporäre oder kurze Rente, deren gegenwärtigen Wert wir mit $\overset{d}{\overline{R}}_x$ bezeichnen, wo das d über dem R angiebt, wie viele Jahre hindurch die Rente bezogen wird.

In der Formel für die lebenslängliche Leibrente fallen sämtliche Zahlungen nach der d-ten weg, wir erhalten daher

$$\overset{d}{\overline{R}}_x = 1 + \frac{L_{x+1}}{L_x}\frac{1}{r} + \frac{L_{x+2}}{L_x}\frac{1}{r^2} + \cdots + \frac{L_{x+d-1}}{L_x} \cdot \frac{1}{r^{d-1}}$$

oder

$$\overset{d}{\overline{R}}_x = 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \cdots + \frac{D_{x+d-1}}{D_x}$$

$$\overset{d}{\overline{R}}_x = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \ldots + D_{x+d-1}}{D_x} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{k=d-1} D_{x+k}}{D_x}.$$

Da jedoch:

$$D_x + D_{x+1} + \ldots + D_{x+d-1} = (D_x + D_{x+1} + \ldots + D_\omega) \\ - (D_{x+d} + D_{x+d-1} + \ldots + D_\omega),$$

wo ω, wie bisher, das höchste in der Sterbetafel vorkommende Alter bezeichnet, oder

$$\sum_{k=0}^{k=d-1} D_{x+k} = \Sigma D_x - \Sigma D_{x+d}$$

folgt:

$$\overset{d}{\overline{R}}_x = \frac{\Sigma D_x - \Sigma D_{x+d}}{D_x} \qquad 1)$$

oder auch:

$$\overset{d}{\overline{R}}_x = \frac{\Sigma D_x}{D_x} - \frac{\Sigma D_{x+d}}{D_x}$$

und wegen

$$\frac{\Sigma D_x}{D_x} = R_x \text{ und } \frac{\Sigma D_{x+d}}{D_x} = {}^{d}\overline{R}_x,$$

weiters auch:

$$\overset{d}{\overline{R}}_x = R_x - {}^{d}\overline{R}_x \qquad 2)$$

d. h. die d Jahre hindurch zahlbare temporäre Leibrente wird erhalten, wenn man von der lebenslänglichen Leibrente die um d Jahre aufgeschobene Leibrente des x-jährigen in Abzug bringt.

Wir können die Formel 2) durch folgende Überlegung auch unmittelbar erhalten:

Die lebenslängliche Leibrente für den x-jährigen kann aus zwei Teilen bestehend gedacht werden, von denen der erste die Zahlungen zu Beginn des 1., 2., 3.... d-ten Jahres, d. i. die temporäre Leibrente für d Jahre, der zweite die weiteren Zahlungen vom Beginne des $(d+1)$-ten Jahres angefangen, d. i. die um d Jahre aufgeschobene Leibrente umfaſst; es ist daher

$$R_x = \overset{d}{\overline{R}}_x + {}^{d}\overline{R}_x$$

und hieraus übereinstimmend mit 2)

$$\overset{d}{\overline{R}}_x = R_x - {}^{d}\overline{R}_x.$$

Für die kurze nachschüssige Leibrente finden wir analog:

$${}_{(1)}\overset{d}{\overline{R}}_x = {}_{(1)}R_x - {}^{d}_{(1)}\overline{R}_x = \frac{\Sigma D_{x+1} - \Sigma D_{x+d+1}}{D_x}.$$

In der Folge soll, wo nichts anderes erwähnt, unter Leibrente stets die vorschüssige Leibrente verstanden werden; auch werden wir uns, wo kein Miſsverständnis zu befürchten ist, statt des Ausdruckes L e i b r e n t e oder l e b e n s l ä n g l i c h e L e i b r e n t e zumeist nur des Wortes R e n t e bedienen.

Tabelle zur Berechnung temporärer Leibrenten nach der Formel: $\overset{d}{\overline{R}}_x = \frac{\Sigma D_x - \Sigma D_{x+}}{D_x}$

x	ΣD_x	ΣD_{x+2}	ΣD_{x+3}	$\Sigma D_x - \Sigma D_{x+2}$	$\Sigma D_x - \Sigma D_{x+3}$	$\log (\Sigma D_x - \Sigma D_{x+2})$	$\log (\Sigma D_x - \Sigma D_{x+3})$	$\log D_x$	$\log \overset{2}{\overline{R}}_x = \log (\Sigma D_x - \Sigma D_{x+2}) - \log D_x$	$\log \overset{3}{\overline{R}}_x = \log (\Sigma D_x - \Sigma D_{x+3}) - \log D_x$	$\overset{2}{\overline{R}}_x$	$\overset{3}{\overline{R}}_x$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
45	332 461	291 082	271 742	41 379	60 719	4·616 780	4·783 325	4·325 285	0·291 495	0·458 040	1·9566	2·8710
46	311 312	271 742	253 265	39 570	58 047	597 366	763 780	305 998	291 368	457 782	1·9560	2·8693
47	291 082	253 265	235 626	37 817	55 456	577 687	743 949	286 462	291 225	457 487	1·9554	2·8674
48	271 742	235 626	218 802	36 116	52 940	557 700	723 784	266 633	291 067	457 151	1·9546	2·8652
49	253 265	218 802	202 776	34 463	50 489	537 353	703 197	246 483	290 870	456 714	1·9538	2·8623
50	235 626	202 776	187 530	32 850	48 096	516 535	682 109	225 930	290 605	456 179	1·9526	2·8588
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Sind die Werte der sofortigen und der aufgeschobenen Leibrenten bereits berechnet, so gestaltet sich die Berechnung der temporären Renten weit bequemer nach der Formel: $\overset{d}{\overline{R}}_x = R_x - {}^{d}\overline{R}_x$, wie aus folgender Tabelle zu ersehen:

x	R_x	${}^{1}\overline{R}_x$	${}^{2}\overline{R}_x$	${}^{3}\overline{R}_x$	${}^{4}\overline{R}_x$	${}^{5}\overline{R}_x$	$\overset{1}{\overline{R}}_x = R_x - {}^{1}\overline{R}_x$	$\overset{2}{\overline{R}}_x = R_x - {}^{2}\overline{R}_x$	$\overset{3}{\overline{R}}_x = R_x - {}^{3}\overline{R}_x$	$\overset{4}{\overline{R}}_x = R_x - {}^{4}\overline{R}_x$	$\overset{5}{\overline{R}}_x = R_x - {}^{5}\overline{R}_x$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
45	15·7201	14·7201	13·7635	12·8491	11·9754	11·1414	1·0000	1·9566	2·8710	3.7447	4·5787
46	15·3886	14·3886	13·4326	12·5192	11·6473	10·8156	1·0000	1·9560	2·8694	3·7413	4·5730
47	15·0506	14·0506	13·0952	12·1832	11·3133	10·4847	1·0000	1·9554	2·8674	3·7373	4·5659
48	14·7070	13·7070	12·7524	11·8418	10·9745	10·1493	1·0000	1·9546	2·8652	3·7325	4·5577
49	14·3580	13·3580	12·4042	11·4957	10·6313	9·8103	1·0000	1·9538	2·8623	3·7267	4·5477
50	14·0053	13·0053	12·0528	11·1466	10·2857	9·4693	1·0000	1·9525	2·8587	3·7196	4·5360
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

§ 13. Aufgeschobene temporäre Renten.

Die Rente kann auch aufgeschoben und temporär zugleich sein. ${}^{a}\overset{d}{\overline{R}}_x$ bezeichnet eine um a Jahre aufgeschobene, d Jahre hindurch zahlbare Rente eines x-jährigen; dieselbe wird zu Beginn des $(a+1)$-ten, $(a+2)$-ten, ... $(a+d)$-ten Jahres im jedesmaligen Betrage 1 gezahlt.

Da die um a Jahre aufgeschobene Leibrente in zwei Teile zerlegt werden kann, deren erster die Zahlungen zu Beginn des $(a+1)$-ten, $(a+2)$-ten, ... $(a+d)$-ten Jahres, der zweite alle späteren Zahlungen vom Beginne des $(a+d+1)$-ten Jahres angefangen umfafst, folgt:

$$ {}^{a}\overline{R}_x = {}^{a}\overset{d}{\overline{R}}_x + {}^{(a+d)}\overline{R}_x $$

mithin:

$$ {}^{a}\overset{d}{\overline{R}}_x = {}^{a}\overline{R}_x - {}^{(a+d)}\overline{R}_x \qquad 1) $$

und da:

$$ {}^{a}\overline{R}_x = \frac{\Sigma D_{x+a}}{D_x} \quad \text{und} \quad {}^{(a+d)}\overline{R}_x = \frac{\Sigma D_{x+a+d}}{D_x} $$

weiter aus 1)

$$ {}^{a}\overset{d}{\overline{R}}_x = \frac{\Sigma D_{x+a} - \Sigma D_{x+a+d}}{D_x}. \qquad 2) $$

Für die aufgeschobene temporäre Rente gestaltet sich die Rechnung ebenfalls bequemer nach der Formel 1), wie aus folgender Tabelle ersichtlich:

x	${}^{3}\overline{R}_x$	${}^{4}\overline{R}_x$	${}^{5}\overline{R}_x$	${}^{6}\overline{R}_x$	${}^{3}\overset{1}{\overline{R}}_x = {}^{3}\overline{R}_x - {}^{4}\overline{R}_x$
1	2	3	4	5	6
45	12·8491	11·9754	11·1414	10·3459	0·8737
46	12·5192	11·6473	10·8156	10·0235	0·8719
47	12·1832	11·3133	10·4847	9·6964	0·8699
48	11·8418	10·9745	10·1493	9·3655	0·8673
49	11·4957	10·6313	9·8103	9·0316	0·8644
50	11·1466	10·2857	9·4693	8·6926	0·8609
.	.	.	.	.	.

${}^{3}\overset{2}{\overline{R}}_x = {}^{3}\overline{R}_x - {}^{5}\overline{R}_x$	${}^{3}\overset{3}{\overline{R}}_x = {}^{3}\overline{R}_x - {}^{6}\overline{R}_x$	${}^{4}\overset{1}{\overline{R}}_x = {}^{4}\overline{R}_x - {}^{5}\overline{R}_x$	${}^{4}\overset{2}{\overline{R}}_x = {}^{4}\overline{R}_x - {}^{6}\overline{R}_x$	${}^{5}\overset{1}{\overline{R}}_x = {}^{5}\overline{R}_x - {}^{6}\overline{R}_x$	x
7	8	9	10	11	12
1·7077	2·5032	0·8340	1·6295	0·7955	45
1·7036	2·4957	0·8317	1·6238	0·7921	46
1·6985	2·4868	0·8286	1·6169	0·7883	47
1·6925	2·4763	0·8252	1·6090	0·7838	48
1·6854	2·4641	0·8210	1·5997	0·7787	49
1·6773	2·4540	0·8164	1.5931	0·7767	50
.	.	.	.	.	.

§ 14. Altersrenten.

Eine besondere Art der aufgeschobenen Renten sind die **Altersrenten**. Will ein x-jähriger vom Alter a angefangen eine Rente im jährlichen Betrage 1 beziehen, so ist die Rente um $(a - x)$ Jahre aufgeschoben, mithin

$$ {}^{(a-x)}\overline{R}_x = \frac{\Sigma D_{x+(a-x)}}{D_x} = \frac{\Sigma D_a}{D_x}. $$

Altersrenten, zu beziehen vom vollendeten 60., 65. und 70. Lebensjahre an.

x	$\log D_x$	$\log \Sigma D_{60}$	$\log \Sigma D_{65}$	$\log \Sigma D_{70}$	$\log\left(\frac{\Sigma D_{60}}{D_x}\right)$
1	2	3	4	5	6
45	4·325 285	5·005 011	4·771 594	4·487 039	0·679 726
46	305 998	"	"	"	699 013
47	286 462	"	"	"	718 549
48	266 633	"	"	"	738 378
49	246 483	"	"	"	758 528
50	225 930	"	"	"	779 081
.	.	.	.	.	.

$\log\left(\frac{\Sigma D_{65}}{D_x}\right)$	$\log\left(\frac{\Sigma D_{70}}{D_x}\right)$	${}^{(60-x)}\overline{R}_x = \frac{\Sigma D_{60}}{D_x}$	${}^{(65-x)}\overline{R}_x = \frac{\Sigma D_{65}}{D_x}$	${}^{(70-x)}\overline{R}_x = \frac{\Sigma D_{70}}{D_x}$	x
7	8	9	10	11	12
0·446 309	0·161 754	4·7833	2·7945	1·4513	45
465 596	181 041	5·0005	2·9214	1·5172	46
485 132	200 577	5·2306	3·0559	1·5870	47
504 961	220 406	5·4749	3·1986	1·6611	48
525 111	240 556	5·7349	3·3505	1·7400	49
545 664	261 109	6·0129	3·5129	1·8244	50
.	.	.	.	.	.

§ 15. Steigende Renten.

Wird die Rente nicht in einem gleich bleibenden, sondern von Jahr zu Jahr steigenden Betrage ausbezahlt, so haben wir es mit einer steigenden Rente zu thun; wir betrachten hier nur solche steigende Renten, bei denen die in den auf einander folgenden Jahren zur Auszahlung gelangenden Beträge eine arithmetische Progression bilden; die einfachste steigende Rente ist jene, bei welcher

	zu	Beginn	des	1.	Jahres	der	Betrag	1,
	„	„	„	2.	„	„	„	2,
	„	„	„	3.	„	„	„	3,
	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
u. s. w.	„	„	„	k-ten	„	„	„	k

ausbezahlt wird, der auszubezahlende Betrag daher, solange der Versicherte am Leben ist, jährlich um den Betrag 1 zunimmt. Wir bezeichnen die Einmal-Prämie dieser Rente mit $\overset{\angle}{R}_x$ und nennen sie eine lebenslänglich steigende Rente.

---

§ 16. Lebenslänglich steigende Renten.

Wir können uns die lebenslänglich steigende Rente aus der Summe mehrerer im jährlichen Betrage 1 zahlbarer Renten bestehend denken, von denen die 1. sofort, die 2. nach 1 Jahre, die 3. nach 2 Jahren u. s. w. beginnt.

Es ist daher

$$\overset{\angle}{R}_x = R_x + {}^{1}\overline{R}_x + {}^{2}\overline{R}_x + {}^{3}\overline{R}_x + \ldots \qquad 1)$$

und da

$$R_x = \frac{\Sigma D_x}{D_x} \text{ und } {}^{k}\overline{R}_x = \frac{\Sigma D_{x+k}}{D_x}$$

$$\overset{\angle}{R}_x = \frac{\Sigma D_x}{D_x} + \frac{\Sigma D_{x+1}}{D_x} + \frac{\Sigma D_{x+2}}{D_x} + \ldots$$

oder

$$\overset{\angle}{R}_x = \frac{\Sigma D_x + \Sigma D_{x+1} + \Sigma D_{x+2} + \ldots}{D_x}. \qquad 2)$$

Setzen wir

$$\Sigma D_x + \Sigma D_{x+1} + \Sigma D_{x+2} + \ldots = \Sigma\Sigma D_x, \qquad 3)$$

wo $\Sigma\Sigma D_x$ die Summe der Summen der diskontierten Zahlen genannt und aus ΣD_x, ΣD_{x+1}, $\Sigma D_{x+2} \ldots \Sigma D_\omega$ in ähnlicher Weise gebildet wird, wie ΣD_x aus D_x, D_{x+1}, $D_{x+2} \ldots D_\omega$, so ist

$$\overset{\angle}{R}_x = \frac{\Sigma\Sigma D_x}{D_x}. \qquad 4)$$

Die Formel 4) kann auch auf folgende Weise abgeleitet werden. Da im 1. Jahre der Betrag 1, im 2. Jahre der Betrag 2, u. s. w. ausbezahlt wird, ist

$$\overset{\angle}{R}_x = 1 + 2\,\frac{L_{x+1}}{L_x}\cdot\frac{1}{r} + 3\,\frac{L_{x+2}}{L_x}\cdot\frac{1}{r^2} + 4\,\frac{L_{x+3}}{L_x}\cdot\frac{1}{r^3} + \ldots$$

oder

$$\overset{\angle}{R}_x = 1 + 2\,\frac{D_{x+1}}{D_x} + 3\,\frac{D_{x+2}}{D_x} + 4\,\frac{D_{x+3}}{D_x} + \ldots$$

$$\overset{\angle}{R}_x = \frac{D_x + 2D_{x+1} + 3D_{x+2} + 4D_{x+3} + \ldots}{D_x} \qquad 5)$$

Der Zähler $(D_x + 2D_{x+1} + 3D_{x+2} + 4D_{x+3} + \ldots)$ kann nun in folgende Summen zerlegt werden:

$$\begin{aligned} D_x + 2D_{x+1} + 3D_{x+2} + 4D_{x+3} + \ldots \\ = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots \\ + D_{x+1} + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots \\ + D_{x+2} + D_{x+3} + \ldots \\ + D_{x+3} + \ldots \\ + \ldots \end{aligned}$$

und, wenn wir horizontal summieren,

$$\begin{aligned} D_x + 2D_{x+1} + 3D_{x+2} + 4D_{x+3} + \ldots \\ = \Sigma D_x + \Sigma D_{x+1} + \Sigma D_{x+2} + \Sigma D_{x+3} + \ldots = \Sigma\Sigma D_x \end{aligned}$$

also

$$\overset{\angle}{R}_x = \frac{\Sigma\Sigma D_x}{D_x}.$$

Schema zur Berechnung unbegrenzt steigender Renten.

x	ΣD_x	$\Sigma\Sigma D_x = \Sigma\Sigma D_{x+1} + \Sigma D_x$	$\log \Sigma\Sigma D_x$	$\log D_x$	$\log \overset{\angle}{R}_x = \log \Sigma\Sigma D_x - \log D_x$	$\overset{\angle}{R}_x$
1	2	3	4	5	6	7
89	99·5394	99·5394	1·997 995	1·997 995	0·000 000	1·0000
88	235·226	334·765	2·524 741	2·132 539	392 202	2·4672
87	418·156	752·921	876 750	262 286	614 464	4·1159
86	662·612	1 415·53	3·150 919	388 200	762 719	5·7905
85	986·712	2 402·25	380 618	510 679	869 939	7·4121
84	1 410·46	3 812·71	581 234	627 110	954 124	8·9975
83	1 956·40	5 769·11	761 109	737 148	1.023 961	10·5672
82	2 648·14	8 417·25	925 170	839 943	085 227	12·1682
81	3 508·08	11 925·3	4.076 469	934 466	142 003	13·8676
80	4 557·52	16 482·8	217 031	3·020 959	196 072	15·7062
.	.	.	.	.	.	.

Die Werte für ΣD_x und $\log D_x$ wurden der Grundtafel zur Berechnung der Leibrente entnommen.

Wäre die Rente das 1. Jahr im Betrage α, das 2. Jahr im Betrage $(\alpha + \delta)$, das 3. Jahr im Betrage $(\alpha + 2\delta)$ u. s. w. zu zahlen, und bezeichnen wir die Einmal-Prämie dieser Rente mit $\overset{\angle\delta}{R}{}^{\alpha}_{x}$, so ist diese Rente offenbar gleich einer lebenslänglichen Leibrente im jährlichen Betrage $(\alpha - \delta)$ mehr einer steigenden Rente, die im 1. Jahre im Betrage $\underline{\delta}$, im 2. Jahre im Betrage $\underline{2\delta}$, im 3. Jahre im Betrage $\underline{3\delta}$ u. s. w. zu zahlen ist.

Es ist daher

$$\overset{\angle\delta}{R}{}^{\alpha}_{x} = (\alpha - \delta)\, R_x + \delta\, \overset{\angle}{R}_x \qquad 6)$$

oder

$$\overset{\angle\delta}{R}{}^{\alpha}_{x} = (\alpha - \delta)\, \frac{\Sigma D_x}{D_x} + \delta\, \frac{\Sigma\Sigma D_x}{D_x} \qquad 7)$$

$$\overset{\angle\delta}{R}{}^{\alpha}_{x} = \frac{(\alpha - \delta)\, \Sigma D_x + \delta\, \Sigma\Sigma D_x}{D_x}.$$

§ 17. Eine Anzahl von Jahren hindurch steigende und dann konstant bleibende Renten.

Es bezeichne ${}^{k|}\overline{R}_x$ die Einmal-Prämie einer Rente, die das 1. Jahr im Betrage 1, das 2. Jahr im Betrage 2, . . ., das k-te und jedes folgende Jahr, so lange der Versicherte am Leben ist, im Betrage k gezahlt wird. Es ist alsdann ${}^{k|}\overline{R}_x$ gleich der Summe von k Renten im jedesmaligen Betrage 1, deren erste sofort, die 2. nach einem Jahre, die 3. nach 2 Jahren, . . . die k-te nach $(k-1)$ Jahren beginnt.

$$ {}^{k|}\overline{R}_x = R_x + {}^{1}\overline{R}_x + {}^{2}\overline{R}_x + \ldots + {}^{(k-1)}\overline{R}_x $$

$$ {}^{k|}\overline{R} = \frac{\Sigma D_x}{D_x} + \frac{\Sigma D_{x+1}}{D_x} + \frac{\Sigma D_{x+2}}{D_x} + \ldots + \frac{\Sigma D_{x+k-1}}{D_x} $$

oder

$$ {}^{k|}\overline{R}_x = \frac{\Sigma D_x + \Sigma D_{x+1} + \Sigma D_{x+2} + \ldots + \Sigma D_{x+k-1}}{D_x} $$

Der Wert des Zählers ändert sich nicht, wenn

$$ \Sigma D_{x+k} + \Sigma D_{x+k+1} + \Sigma D_{x+k+2} + \ldots $$

bis zum höchsten Alter dazu addiert und zugleich von demselben subtrahiert wird.

Nun ist aber

$$ \Sigma D_x + \Sigma D_{x+1} + \Sigma D_{x+2} + \ldots $$
$$ + \Sigma D_{x+k-1} + \Sigma D_{x+k} + \Sigma D_{x+k+1} + \ldots + \Sigma D_\omega = \Sigma\Sigma D_x $$
$$ \Sigma D_{x+k} + \Sigma D_{x+k+1} + \Sigma D_{x+k+2} + \ldots + \Sigma D_\omega = \Sigma\Sigma D_{x+k}, $$

folglich:

$$ {}^{k|}\overline{R}_x = \frac{\Sigma\Sigma D_x - \Sigma\Sigma D_{x+k}}{D_x}. \qquad 1) $$

So ist z. B.

$$ {}^{5|}\overline{R}_{80} = \frac{\Sigma\Sigma D_{80} - \Sigma\Sigma D_{85}}{D_{80}} = \frac{16482{\cdot}8 - 2402{\cdot}25}{1049{\cdot}44} = \frac{14080{\cdot}55}{1049{\cdot}44} $$

$$\log 14080{\cdot}55 = 4{\cdot}148620$$
$$\log 1049{\cdot}44 = 3{\cdot}020959$$

$$\log \overset{5|\overline{}}{R_{80}} = 1.127661$$
$$\overset{5|\overline{}}{R_{80}} = 13{\cdot}4172$$

Bezeichnet $\overset{k|\overline{\delta}\,\alpha}{R_x}$ eine Rente, die mit dem Betrage α beginnt, jährlich um δ steigt und, nachdem sie k-mal gezahlt wurde, mit dem zu Beginn des k-ten Jahres erreichten höchsten Betrage $[\alpha + (k - 1)\delta]$ konstant bleibt, so kann diese Rente durch die Summe zweier Renten ersetzt werden, deren erste im konstanten Betrage von $(\alpha - \delta)$ jährlich, die zweite in einem von δ bis $k\delta$ steigenden und dann konstant bleibenden Betrage ausbezahlt wird.

Es ist daher

$$\overset{k|\overline{\delta}\,\alpha}{R_x} = (\alpha - \delta) R_x + \delta \overset{k|\overline{}}{R_x} \qquad 2)$$

oder

$$\overset{k|\overline{\delta}\,\alpha}{R_x} = \frac{(\alpha - \delta)\Sigma D_x + \delta(\Sigma\Sigma D_x - \Sigma\Sigma D_{x+k})}{D_x}. \qquad 3)$$

---

§ 18. Eine Anzahl von Jahren hindurch steigende und dann aufhörende Renten.

Bezeichnen wir mit $\overset{k\angle}{R_x}$ eine Rente, die zu Beginn des 1., 2., 3., ... k-ten Jahres im Betrage 1, 2, 3, ... k ausbezahlt wird und dann aufhört, so kann dieselbe durch k temporäre Renten im jährlichen Betrage 1 ersetzt werden, deren erste sofort beginnt und k Jahre dauert, die 2. nach 1 Jahre beginnt und $(k - 1)$ Jahre dauert ... und deren letzte nach $(k - 1)$ Jahren beginnt und nur einmal gezahlt wird.

Es ist daher

$$\overset{k\angle}{R_x} = \overset{k}{\overline{R}_x} + {}^{1}\overset{(k-1)}{\overline{R}_x} + {}^{2}\overset{(k-2)}{\overline{R}_x} + \ldots + {}^{(k-1)}\overset{1}{\overline{R}_x} \qquad 1)$$

Da

$$ {}_{a}\overset{d}{\overline{R}}_{x} = \frac{\Sigma D_{x+a} - \Sigma D_{x+a+d}}{D_x}, $$

mithin

$$ {}_{i}\overset{(k-i)}{\overline{R}}_{x} = \frac{\Sigma D_{x+i} - \Sigma D_{x+i+(k-i)}}{D_x} = \frac{\Sigma D_{x+i} - \Sigma D_{x+k}}{D_x} $$

erhalten wir, wenn für i der Reihe nach 0, 1, 2 ... $(k-1)$ gesetzt wird

$$ \overset{k\angle}{R}_x = \frac{(\Sigma D_x - \Sigma D_{x+k}) + (\Sigma D_{x+1} - \Sigma D_{x+k}) + \ldots + (\Sigma D_{x+k-1} - \Sigma D_{x+k})}{D_x} $$

oder

$$ \overset{k\angle}{R}_x = \frac{(\Sigma D_x + \Sigma D_{x+1} + \Sigma D_{x+2} + \ldots + \Sigma D_{x+k-1})}{D_x} $$

$$ - \frac{\overbrace{(\Sigma D_{x+k} + \Sigma D_{x+k} + \ldots + \Sigma D_{x+k})}^{k\text{-mal}}}{D_x} $$

und da

$$ \Sigma D_x + \Sigma D_{x+1} + \Sigma D_{x+2} + \ldots + \Sigma D_{x+k-1} = \Sigma\Sigma D_x - \Sigma\Sigma D_{x+k} $$

$$ \overset{k\angle}{R}_x = \frac{\Sigma\Sigma D_x - \Sigma\Sigma D_{x+k} - k\Sigma D_{x+k}}{D_x}. \qquad 2) $$

So ist z. B. der Wert einer steigenden Rente für einen 80jährigen, die mit dem Betrage 1 beginnt, jährlich um 1 steigt und, nachdem sie 5mal gezahlt wurde, aufhört:

$$ \overset{5\angle}{R}_{80} = \frac{\Sigma\Sigma D_{80} - \Sigma\Sigma D_{85} - 5\Sigma D_{85}}{D_{80}} = \frac{16482{\cdot}8 - 2402{\cdot}25 - 5.986{\cdot}712}{1049{\cdot}44} $$

$$ = \overset{5\angle}{R}_{80} = \frac{16482{\cdot}8 - 2402{\cdot}25 - 4933{\cdot}56}{1049{\cdot}44} = \frac{9147{\cdot}0}{1049{\cdot}44} $$

$$ \begin{array}{l} \log 9147{\cdot}0 \;\; = 3{\cdot}961279 \\ \log 1049{\cdot}44 = 3{\cdot}020959 \\ \hline \log \overset{5\angle}{R}_{80} = 0{\cdot}940320 \\ \overset{5\angle}{R}_{80} = 8{\cdot}7161 \end{array} $$

Bezeichnet analog ${}^{k}\overset{\angle\delta_\alpha}{R_x}$ eine steigende Rente, die zu Beginn des 1., 2., 3., ... k-ten Jahres im Betrage α, $\alpha+\delta$, $\alpha+2\delta, \ldots [\alpha+(k-1)\delta]$ ausbezahlt wird und dann aufhört, so kann diese Rente ersetzt werden durch die Summe einer konstanten k Jahre andauernden Rente im jährlichen Betrage von $(\alpha-\delta)$ und einer k Jahre hindurch steigenden und dann aufhörenden Rente im Zahlungsbetrage δ, 2δ, $3\delta, \ldots k\delta$ in den aufeinanderfolgenden Jahren.

Es ist daher

$$ {}^{k}\overset{\angle\delta_\alpha}{R_x} = (\alpha-\delta)\,{}^{k}\overline{R}_x + \delta\,{}^{k}\overset{\angle}{R}_x \tag{3} $$

oder

$$ {}^{k}\overset{\angle\delta_\alpha}{R_x} = \frac{(\alpha-\delta)(\Sigma D_x - \Sigma D_{x+k}) + \delta(\Sigma\Sigma D_x - \Sigma\Sigma D_{x+k} - k\Sigma D_{x+k})}{D_x} \tag{4} $$

---

§ 19. Aufgeschobene steigende Renten.

Soll die lebenslänglich steigende Rente nicht sofort, sondern erst nach a Jahren, also zu Anfang des $(a+1)$-ten Jahres beginnen, so heifst sie um a Jahre aufgeschoben; wir bezeichnen ihren gegenwärtigen Wert analog der bisherigen Bezeichnung mit ${}^{a}\overset{\angle}{R}_x$, falls die Rente nach a Jahren mit dem Betrage 1 beginnt und jährlich um 1 steigt.

${}^{a}\overset{\angle}{R}_x$ mufs gleich sein dem gegenwärtigen Werte einer Erlebensversicherung auf einen nach a Jahren zahlbaren Betrag $\overset{\angle}{R}_{x+a}$, da der Versicherte für den Betrag $\overset{\angle}{R}_{x+a}$ eine nach a Jahren, also im Alter $(x+a)$ beginnende, lebenslänglich steigende Rente erwerben kann.

Es ist daher

$$ {}^{a}\overset{\angle}{R}_x = {}^{a}E_x\,\overset{\angle}{R}_{x+a} \tag{1} $$

und da

$$ {}^{a}E_x = \frac{D_{x+a}}{D_x} \quad \text{auch} \quad {}^{a}\overset{\angle}{R}_x = \frac{D_{x+a}}{D_x}\,\overset{\angle}{R}_{x+a} \tag{2} $$

oder auch, da $\overset{\angle}{R}_{x+a} = \frac{\Sigma\Sigma D_{x+a}}{D_{x+a}}$,

$$ {}_a\overset{\angle}{R}_x = \frac{\Sigma\Sigma D_{x+a}}{D_x}. \qquad 3) $$

Ebenso finden wir:

$$ {}_a\overset{\angle\delta}{R}{}^{\alpha}_x = \frac{D_{x+a}}{D_x} \cdot \overset{\angle\delta}{R}{}^{\alpha}_{x+a} = \frac{D_{x+a}}{D_x}\left[(\alpha-\delta)R_{x+a} + \delta \overset{\angle}{R}_{x+a}\right] $$

$$ = \frac{(\alpha-\delta)\Sigma D_{x+a} + \delta\Sigma\Sigma D_{x+a}}{D_x} \qquad 4) $$

für eine um a Jahre aufgeschobene, dann mit dem Betrage α beginnende, jährlich um δ steigende Rente.

Beginnt die aufgeschobene Rente nach a Jahren mit dem Betrage 1, steigt jährlich um den Betrag 1 und bleibt dann, nachdem sie k-mal gezahlt wurde, im Betrage k konstant, so ist ihr gegenwärtiger Wert:

$$ {}^{k|\overline{\ \ }}_{a}R_x = \frac{D_{x+a}}{D_x}\ {}^{k|\overline{\ \ }}R_{x+a} = \frac{D_{x+a}}{D_x}\ \frac{\Sigma\Sigma D_{x+a} - \Sigma\Sigma D_{x+a+k}}{D_{x+a}} $$

$$ = \frac{\Sigma\Sigma D_{x+a} - \Sigma\Sigma D_{x+a+k}}{D_x}. \qquad 5) $$

Soll die aufgeschobene Rente nach a Jahren mit dem Betrage α beginnen, jährlich um δ steigen und, nachdem sie k-mal gezahlt wurde, mit dem Höchstbetrage $[a+(k-1)\delta]$ konstant bleiben, erhalten wir als gegenwärtigen Wert derselben:

$$ {}^{k|\overline{\delta}}_{a}R^{\alpha}_x = \frac{D_{x+a}}{D_x}\ {}^{k|\overline{\delta}}R^{\alpha}_{x+a} = \frac{D_{x+a}}{D_x}\left[(\alpha-\delta)R_{x+a} + \delta\ {}^{k|\overline{\ \ }}R_{x+a}\right] $$

$$ = \frac{D_{x+a}}{D_x}\ \frac{(\alpha-\delta)\Sigma D_{x+a} + \delta(\Sigma\Sigma D_{x+a} - \Sigma\Sigma D_{x+a+k})}{D_{x+a}} $$

$$ {}^{k|\overline{\delta}}_{a}R^{\alpha}_x = \frac{(\alpha-\delta)\Sigma D_{x+a} + \delta(\Sigma\Sigma D_{x+a} - \Sigma\Sigma D_{x+a+k})}{D_x} \qquad 6) $$

Wenn die aufgeschobene Rente nach a Jahren mit dem Betrage 1 beginnt, durch k Jahre jährlich um 1 steigt, und dann aufhört, ergiebt sich als ihr gegenwärtiger Wert:

$$ {}^{k\angle}_{a}R_x = \frac{D_{x+a}}{D_x}\, {}^{k\angle}R_{x+a} $$

$$ = \frac{D_{x+a}}{D_x}\, \frac{\Sigma\Sigma D_{x+a} - \Sigma\Sigma D_{x+a+k} - k\Sigma D_{x+a+k}}{D_{x+a}} $$

$$ {}^{k\angle}_{a}R_x = \frac{\Sigma\Sigma D_{x+a} - \Sigma\Sigma D_{x+a+k} - k\Sigma D_{x+a+k}}{D_x} \qquad 7) $$

und endlich finden wir für die aufgeschobene, nach a Jahren mit dem Betrage α beginnende, jährlich um δ steigende und, nachdem sie k-mal gezahlt wurde, aufhörende Rente:

$$ {}^{k\angle\delta}_{a}R^{\alpha}_{x} = \frac{D_{x+a}}{D_x}\, {}^{k\angle\delta}R^{\alpha}_{x+a} = \frac{D_{x+a}}{D_x}\left[(\alpha-\delta)\, {}^{k}\overline{R}_{x+a} + \delta\, {}^{k\angle}R_{x+a}\right] = $$

$$ = \frac{D_{x+a}}{D_x}\, \frac{(\alpha-\delta)(\Sigma D_{x+a} - \Sigma D_{x+a+k})}{D_{x+a}} $$

$$ + \frac{D_{x+a}}{D_x}\, \frac{\delta(\Sigma\Sigma D_{x+a} - \Sigma\Sigma D_{x+a+k} - k\Sigma D_{x+a+k})}{D_{x+a}} $$

$$ {}^{k\angle\delta}_{a}R^{\alpha}_{x} = \frac{(\alpha-\delta)(\Sigma D_{x+a} - \Sigma D_{x+a+k})}{D_x} $$

$$ + \frac{\delta(\Sigma\Sigma D_{x+a} - \Sigma\Sigma D_{x+a+k} - k\Sigma D_{x+a+k})}{D_x}. \qquad 8) $$

Den Wert einer um 3 Jahre aufgeschobenen, lebenslänglich steigenden Rente für einen 80jährigen finden wir:

$$ {}_{3}^{\angle}R_{80} = \frac{\Sigma\Sigma D_{83}}{D_{80}} = \frac{5769{\cdot}11}{1049{\cdot}44} $$

$$ \begin{aligned} \log\ \Sigma\Sigma D_{83} &= 3{\cdot}761\,109 \\ \log\ D_{80} &= 3{\cdot}020\,959 \\ \hline \log\ {}_{3}^{\angle}R_{80} &= 0{\cdot}740\,150 \\ {}_{3}^{\angle}R_{80} &= 5{\cdot}4973 \end{aligned} $$

Soll die um 3 Jahre aufgeschobene, steigende Rente für einen 80jährigen nach 5maliger Zahlung konstant bleiben, finden wir:

$$ {}^{5/\!\overline{\ }}_{3}\overline{R}_{80} = \frac{\Sigma\Sigma D_{88} - \Sigma\Sigma D_{88}}{D_{80}} = \frac{5769{\cdot}11 - 334{\cdot}765}{1049{\cdot}44} = \frac{5434{\cdot}34}{1049{\cdot}44} $$

$$\begin{aligned}\log\ 5434{\cdot}34 &= 3{\cdot}735147\\ \log\ 1049{\cdot}44 &= 3{\cdot}020959\\ \hline \log\ {}^{5|}_{3}\overline{R}_{80} &= 0{\cdot}714188\\ {}^{5|}_{3}\overline{R}_{80} &= 5{\cdot}1783\end{aligned}$$

Hört die um 3 Jahre aufgeschobene, steigende Rente für einen 80-jährigen nach 5maliger Zahlung ganz auf, so ist:

$${}^{5\angle}_{3}R_{80} = \frac{\Sigma\Sigma D_{83} - \Sigma\Sigma D_{88} - 5\Sigma D_{88}}{D_{80}} = \frac{5769{\cdot}11 - 334{\cdot}765 - 5.235{\cdot}226}{1049{\cdot}44}$$

$${}^{5\angle}_{3}R_{80} = \frac{5769{\cdot}11 - 334{\cdot}765 - 1176{\cdot}13}{1049{\cdot}44} = \frac{4258{\cdot}21}{1049{\cdot}44}$$

$$\begin{aligned}\log\ 4258{\cdot}21 &= 3{\cdot}629227\\ \log\ 1049{\cdot}44 &= 3{\cdot}020959\\ \hline \log\ {}^{5\angle}_{3}R_{80} &= 0{\cdot}608268\\ {}^{5\angle}_{3}R_{80} &= 4{\cdot}0576\end{aligned}$$

---

§ 20. Unterjährige Renten.

Wird die Rente nicht einmal jährlich, sondern in kleineren Terminen wiederkehrend ausbezahlt, so nennen wir sie eine unterjährige oder terminweise Rente.

Wir bezeichnen mit $\overset{n}{\overline{R}}{}^{n}_{x}$ den gegenwärtigen Wert einer vorschüssigen lebenslänglichen unterjährigen Rente, welche an eine beim Abschlusse der Versicherung x-jährige Person in Zeitabschnitten von $\frac{1}{n}$ Jahren jedesmal im Betrage $\frac{1}{n}$ ausbezahlt wird und bei welcher die erste Zahlung sofort beim Abschlusse der Versicherung erfolgt, mit ${}^{a}\overset{n}{\overline{R}}{}^{n}_{x}$ den Wert einer ebensolchen, jedoch um a Jahre aufgeschobenen Rente.

Van Geers Methode zur Berechnung des Wertes der unterjährigen Rente.

Die 1., $(n+1)$-te, $(2n+1)$-te, $(3n+1)$-te, ... $(kn+1)$-te ... Zahlung im jedesmaligen Betrage von $\frac{1}{n}$ ergeben zusammen eine gewöhnliche vorschüssige Leibrente im jährlich einmaligen Zahlungsbetrage von $\frac{1}{n}$, ihre Summe ist daher $\frac{1}{n}\,R_x$.

Ebenso ist die Summe der 2., $(n+2)$-ten, $(2n+2)$-ten, ... $(kn+2)$-ten ... Zahlung gleich einer um $\frac{1}{n}$ Jahr aufgeschobenen vorschüssigen Leibrente im jährlichen Zahlungsbetrage von $\frac{1}{n}$, daher gleich $\frac{1}{n}\,{}^{\frac{1}{n}}\overline{R}_x$.

Die Summe der 3., $(n+3)$-ten, $(2n+3)$-ten, ... $(kn+3)$-ten ... Zahlung ist ebenso gleich $\frac{1}{n}\,{}^{\frac{2}{n}}\overline{R}_x$;

endlich die Summe der n-ten, $2n$-ten, ... kn-ten ... Zahlung gleich der um $\frac{n-1}{n}$ Jahre aufgeschobenen Rente im jährlichen Betrage von $\frac{1}{n}$, gleich $\frac{1}{n}\,{}^{\frac{n-1}{n}}\overline{R}_x$.

Wir erhalten daher:

$$R_x^{\frac{n}{n}} = \frac{1}{n}\left(R_x + {}^{\frac{1}{n}}\overline{R}_x + {}^{\frac{2}{n}}\overline{R}_x + \ldots + {}^{\frac{n-1}{n}}\overline{R}_x\right). \quad 1)$$

Da die um 1 Jahr aufgeschobene Leibrente um 1 kleiner ist, als die sofort beginnende Leibrente

$${}^{1}\overline{R}_x = R_x - 1$$

kann näherungsweise angenommen werden, dafs die um $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots \frac{n-1}{n}$ Jahre aufgeschobene Leibrente um $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots \frac{n-1}{n}$ kleiner ist, als die sofort beginnende Leibrente. Es ist daher

$$^{\frac{1}{n}}\overline{R}_x = R_x - \frac{1}{n}$$

$$^{\frac{2}{n}}\overline{R}_x = R_x - \frac{2}{n}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$^{\frac{n-1}{n}}\overline{R}_x = R_x - \frac{n-1}{n}$$

Es ergiebt sich daher aus 1)

$$R_x^{\frac{n}{n}} = \frac{1}{n}\left[R_x + \left(R_x - \frac{1}{n}\right) + \left(R_x - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \left(R_x - \frac{n-1}{n}\right)\right]$$

oder

$$R_x^{\frac{n}{n}} = \frac{1}{n}\left[n R_x - \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$R_x^{\frac{n}{n}} = \frac{1}{n}\left(n R_x - \frac{1+2+\ldots+(n-1)}{n}\right) = \frac{1}{n}\left[n R_x - \frac{n(n-1)}{2n}\right]$$

$$R_x^{\frac{n}{n}} = R_x - \frac{n-1}{2n}. \qquad 2)$$

Erfolgt die Zahlung der Rente halbjährig im jedesmaligen Betrage $\frac{1}{2}$, ist $n = 2$, mithin

$$R_x^{\frac{2}{2}} = R_x - \frac{1}{4} = R_x - 0{\cdot}25. \qquad 3)$$

Bei vierteljährlicher Zahlung im jedesmaligen Betrage von $\frac{1}{4}$ ist $n = 4$, mithin

$$R_x^{\frac{4}{4}} = R_x - \frac{3}{8} = R_x - 0{\cdot}375. \qquad 4)$$

Wird die Rente monatlich im jedesmaligen Betrage von $\frac{1}{12}$ gezahlt, ist $n = 12$, mithin

$$R_x^{\frac{12}{12}} = R_x - \frac{11}{24} = R_x - 0{\cdot}458\dot{3}. \qquad 5)$$

Denken wir uns den jährlich zur Zahlung gelangenden Betrag 1 in unendlich viele, in unendlich kleinen Zeit-Intervallen innerhalb eines Jahres zur Zahlung gelangende,

unendlich kleine Beträge geteilt, so erhalten wir die kontinuierliche Rente $R_x^{\frac{\infty}{\infty}}$.

Der Wert derselben $R_x^{\frac{\infty}{\infty}} = R_x - \lim \left(\frac{n-1}{2n}\right)_{n=\infty}$

$= R_x - \lim \left(\frac{1-\frac{1}{n}}{2}\right)_{n=\infty}$ und da $\lim \left(\frac{1}{n}\right)_{n=\infty} = 0$, folgt

$$R_x^{\frac{\infty}{\infty}} = R_x - \frac{1}{2} \tag{6}$$

als Wert der kontinuierlichen Rente.

Ist die unterjährige Rente dekursiv, so erfolgt die Zahlung des 1. Betrages von $\frac{1}{n}$ nicht sofort, sondern am Ende des ersten $\frac{1}{n}$ Jahres, während alle übrigen Zahlungen dieselben bleiben, wie bei der vorschüssigen unterjährigen Rente.

Der Wert der nachschüssigen unterjährigen Rente ist daher um $\frac{1}{n}$ kleiner, als der der vorschüssigen unterjährigen Rente.

Es ist daher:

$$\left(\tfrac{1}{n}\right)R_x^{\frac{n}{n}} = R_x^{\frac{n}{n}} - \frac{1}{n} = R_x - \frac{n-1}{2n} - \frac{1}{n}$$

oder

$$\left(\tfrac{1}{n}\right)R_x^{\frac{n}{n}} = R_x - \frac{n+1}{2n}. \tag{7}$$

---

§ 21. Berechnung des Wertes der unterjährigen Rente unter der Annahme des gleichmäfsigen Absterbens innerhalb eines Jahres.

Bezeichnen wir die Anzahl der Lebenden des Alters $x,\ x+\frac{1}{n},\ x+\frac{2}{n}, \ldots\ x+\frac{k}{n}, \ldots\ x+1,\ x+1+\frac{1}{n},\ x+1+\frac{2}{n}, \ldots$

mit $\quad L_x,\ L_{x+\frac{1}{n}},\ L_{x+\frac{2}{n}},\ldots\ L_{x+\frac{k}{n}},\ldots\ L_{x+1},$

$$L_{x+1+\frac{1}{n}},\ L_{x+1+\frac{2}{n}},\ldots$$

so erhalten wir für den Wert der im jedesmaligen Betrage von $\frac{1}{n}$ zahlbaren unterjährigen Rente:

$$R_x^{\frac{n}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{L_{x+\frac{1}{n}}}{L_x}\cdot\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}} + \frac{L_{x+\frac{2}{n}}}{L_x}\frac{1}{r^{\frac{2}{n}}} + \ldots \right.$$

$$\left. + \frac{L_{x+\frac{n-1}{n}}}{L_x}\frac{1}{r^{\frac{n-1}{n}}}\right) +$$

$$+\frac{1}{n}\left(\frac{L_{x+1}}{L_x}\frac{1}{r} + \frac{L_{x+1+\frac{1}{n}}}{L_x}\frac{1}{r^{1+\frac{1}{n}}} + \frac{L_{x+1+\frac{2}{n}}}{L_x}\frac{1}{r^{1+\frac{2}{n}}} + \ldots \right.$$

$$\left. + \frac{L_{x+1+\frac{n-1}{n}}}{L_x}\frac{1}{r^{1+\frac{n-1}{n}}}\right) +$$

$$+\frac{1}{n}\left(\frac{L_{x+2}}{L_x}\frac{1}{r^2} + \frac{L_{x+2+\frac{1}{n}}}{L_x}\frac{1}{r^{2+\frac{1}{n}}} + \frac{L_{x+2+\frac{2}{n}}}{L_x}\frac{1}{r^{2+\frac{1}{n}}} + \ldots \right.$$

$$\left. + \frac{L_{x+2+\frac{n-1}{n}}}{L_x}\frac{1}{r^{2+\frac{n-1}{n}}}\right) + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

wo der 1. Klammerausdruck den gegenwärtigen Wert sämtlicher Zahlungen des 1. Jahres, der 2. den gegenwärtigen Wert sämtlicher Zahlungen des 2. Jahres umfaſst u. s. w.

Wir können nun annehmen, daſs das Ableben innerhalb eines Jahres proportional der Zeit erfolgt; die Anzahl der Sterbefälle vom Alter x bis zum Alter $(x+1)$ beträgt $(L_x - L_{x+1})$, es entfallen daher unter dieser Annahme auf $\frac{1}{n}$ Jahr

$$\frac{L_x - L_{x+1}}{n}$$

und auf $\frac{k}{n}$ Jahre $\frac{k}{n}\left(L_x - L_{x+1}\right)$ Sterbefälle.

Es ist daher die Anzahl der Lebenden des Alters $\left(x + \frac{k}{n}\right)$:

$$L_{x+\frac{k}{n}} = L_x - \frac{k}{n}(L_x - L_{x+1}) = \frac{n-k}{n} L_x + \frac{k}{n} L_{x+1} \qquad 2)$$

ebenso ist:

$$L_{x+1+\frac{k}{n}} = \frac{n-k}{n} L_{x+1} + \frac{k}{n} L_{x+2} \qquad 3)$$

u. s. w.

Summieren wir in 1) die vertikalen Kolonnen, so erhalten wir:

$$R_x^{\frac{n}{n}} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{L_{x+1}}{L_x}\frac{1}{r} + \frac{L_{x+2}}{L_x}\frac{1}{r^2} + \ldots\right)$$

$$+ \frac{1}{n}\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}}\left(\frac{L_{x+\frac{1}{n}}}{L_x} + \frac{L_{x+1+\frac{1}{n}}}{L_x}\frac{1}{r} + \frac{L_{x+2+\frac{1}{n}}}{L_x}\frac{1}{r^2} + \ldots\right)$$

$$+ \frac{1}{n}\frac{1}{r^{\frac{2}{n}}}\left(\frac{L_{x+\frac{2}{n}}}{L_x} + \frac{L_{x+1+\frac{2}{n}}}{L_x}\frac{1}{r} + \frac{L_{x+2+\frac{2}{n}}}{L_x}\frac{1}{r^2} + \ldots\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{1}{n}\frac{1}{r^{\frac{n-1}{n}}}\left(\frac{L_{x+\frac{n-1}{n}}}{L_x} + \frac{L_{x+1+\frac{n-1}{n}}}{L_x}\frac{1}{r} + \frac{L_{x+2+\frac{2}{n}}}{L_x}\frac{1}{r^2} + \ldots\right) \qquad 4)$$

oder

$$R_x^{\frac{n}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{1}{r^{\frac{k}{n}}}\left(\frac{L_{x+\frac{k}{n}}}{L_x} + \frac{L_{x+1+\frac{k}{n}}}{L_x}\frac{1}{r} + \right.$$

$$\left. + \frac{L_{x+2+\frac{k}{n}}}{L_x}\frac{1}{r^2} + \ldots\right) \qquad 5)$$

wo k der Reihe nach sämtliche Werte von 0, 1, 2 ... bis $(n-1)$ annimmt.

Substituieren wir nun für

$$L_{x+\frac{k}{n}},\ L_{x+1+\frac{k}{n}},\ L_{x+2+\frac{k}{n}}\ldots$$

die aus 2) folgenden Werte, so erhalten wir aus 5)

$$R_x^{\frac{n}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{1}{r^{\frac{k}{n}}}\left[\frac{\frac{n-k}{n}L_x+\frac{k}{n}L_{x+1}}{L_x}+\frac{\frac{n-k}{n}L_{x+1}+\frac{k}{n}L_{x+2}}{L_x}\frac{1}{r}+\frac{\frac{n-k}{n}L_{x+2}+\frac{k}{n}L_{x+3}}{L_x}\frac{1}{r^2}+\ldots\right]$$

oder

$$R_x^{\frac{n}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{1}{r^{\frac{k}{n}}}\left[\frac{n-k}{n}\left(\frac{L_x}{L_x}+\frac{L_{x+1}}{L_x}\frac{1}{r}+\frac{L_{x+2}}{L_x}\frac{1}{r^2}+\ldots\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{k}{n}\left(\frac{L_{x+1}}{L_x}+\frac{L_{x+2}}{L_x}\frac{1}{r}+\frac{L_{x+3}}{L_x}\frac{1}{r^2}+\ldots\right)\right] \qquad 6)$$

Da: $$\frac{L_x}{L_x}+\frac{L_{x+1}}{L_x}\frac{1}{r}+\frac{L_{x+2}}{L_x}\frac{1}{r^2}+\ldots=R_x$$

und hieraus:

$$\frac{L_{x+1}}{L_x}+\frac{L_{x+2}}{L_x}\frac{1}{r}+\frac{L_{x+3}}{L_x}\frac{1}{r^2}+\ldots=r(R_x-1)$$

folgt aus 6)

$$R_x^{\frac{n}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{1}{r^{\frac{k}{n}}}\left[\frac{n-k}{n}R_x+\frac{k}{n}r(R_x-1)\right]$$

und weiters

$$R_x^{\frac{n}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1}\frac{1}{r^{\frac{k}{n}}}\left(\frac{n-k+kr}{n}R_x-\frac{kr}{n}\right) \qquad 7)$$

Da $r=1+i$, mithin: $n-k+kr=n+ki$

und nach dem Binomialsatze:

$$r^{\frac{k}{n}}=(1+i)^{\frac{k}{n}}=1+\binom{\frac{k}{n}}{1}i+\binom{\frac{k}{n}}{2}i^2+\ldots$$

und bei Vernachlässigung der höheren Potenzen von i

$$r^{\frac{k}{n}} = 1 + \frac{k}{n} i = \frac{n+ki}{n}; \quad \frac{1}{r^{\frac{k}{n}}} = \frac{n}{n+ki}$$

folgt aus 7):

$$R_x^{\frac{n}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{n}{n+ki} \left(\frac{n+ki}{n} R_x - \frac{kr}{n} \right)$$

oder

$$R_x^{\frac{n}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} \left(R_x - \frac{kr}{n+ki} \right)$$

Da R_x innerhalb des Summenzeichens n-mal als Addend zu nehmen ist wegen der n verschiedenen Werte, die k annehmen kann, folgt weiters:

$$R_x^{\frac{n}{n}} = R_x - \frac{r}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{k}{n+ki} \qquad 8)$$

Während die Formel von Van Geer:

$$R_x^{\frac{n}{n}} = R_x - \frac{n-1}{2n}$$

vom Zinsfuſse ganz unabhängig ist, hängt der in der Formel 8) gefundene Wert der unterjährigen Rente auch vom Zinsfuſse ab.

Für einen Zinsfuſs von 0 Prozent, d. h. für $i = 0$ und $r = 1 + i = 1$ geht die Formel 8) in die Formel von Van Geer über, denn es ist alsdann:

$$\frac{r}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{k}{n+ki} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{k}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{k=n-1} k$$

$$= \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \ldots + \overline{n-1}) = \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{n-1}{2n}$$

und

$$R_x^{\frac{n}{n}} = R_x - \frac{n-1}{2n}.$$

Bezeichnen wir kurz:

$$\frac{r}{n} \sum_{n=0}^{k=n-1} \frac{k}{n+ki} = \alpha \qquad 9)$$

oder auch

$$\frac{n-1}{2n} = \alpha \qquad 10)$$

so erhalten wir für die unterjährige Rente

$$R_x^{\frac{n}{n}} = R_x - \alpha \qquad 11)$$

wo für α der Wert aus 9) oder 10) zu setzen ist.

---

§ 22. Aufgeschobene unterjährige Renten.

Da der Wert einer um a Jahre aufgeschobenen Rente für einen x-jährigen gleich ist dem Werte eines in a Jahren fälligen Erlebens-Kapitals im Betrage des Wertes einer gleichen Rente für einen $(x+a)$-jährigen, ist auch:

$$^{a}\overline{R}_x^{\frac{n}{n}} = {}^{a}E_x\, R_{x+a}^{\frac{n}{n}} = \frac{D_{x+a}}{D_x}(R_{x+a} - \alpha)$$

oder

$$^{a}\overline{R}_x^{\frac{n}{n}} = \frac{D_{x+a}}{D_x} R_{x+a} - \frac{D_{x+a}}{D_x}\alpha$$

und da

$$\frac{D_{x+a}}{D_x} R_{x+a} = \frac{D_{x+a}}{D_x} \frac{\Sigma D_{x+a}}{D_{x+a}} = \frac{\Sigma D_{x+a}}{D_x} = {}^{a}\overline{R}_x$$

folgt weiters

$$^{a}\overline{R}_x^{\frac{n}{n}} = {}^{a}\overline{R}_x - \frac{D_{x+a}}{D_x}\alpha. \qquad 1)$$

Nun ist aber der Faktor von α, nämlich $\frac{D_{x+a}}{D_x}$, wie sich leicht zeigen lässt, die Differenz zwischen der Rente ${}^{a}R_x$ und einer ebensolchen, jedoch um ein Jahr aufgeschobenen Rente ${}^{(a+1)}\overline{R}_x$.

Bezeichnen wir diese Differenz mit ${}^{a}\overline{\Delta}_x$, so erhalten wir:

$$^{a}\overline{\Delta}_x = {}^{a}\overline{R}_x - {}^{(a+1)}\overline{R}_x = \frac{\Sigma D_{x+a} - \Sigma D_{x+a+1}}{D_x} = \frac{D_{x+a}}{D_x}.$$

Die Formel 1) kann daher auch geschrieben werden:

$$ {}^{a}\overline{R}_x^{\frac{n}{n}} = {}^{a}\overline{R}_x - {}^{a}\overline{\Delta}_x \alpha. \qquad 2) $$

Für die gewöhnliche Leibrente ist

$$ \Delta_x = R_x - {}^{1}\overline{R}_x = \frac{\Sigma D_x - \Sigma D_{x+1}}{D_x} = \frac{D_x}{D_x} = 1, $$

es läfst sich daher die Formel $R_x^{\frac{n}{n}} = R_x - \alpha$ auch schreiben:

$$ R_x^{\frac{n}{n}} = R_x - \Delta_x \alpha. \qquad 3) $$

---

§ 23. Verallgemeinerung des Begriffes der Rente.

Würden nicht alljährlich gleiche oder regelmäfsig steigende, sondern keinem Gesetze unterworfene, veränderliche Beträge, z. B. im 1. Jahre a_1, im 2. Jahre a_2, ... im k-ten Jahre a_k ... zur Auszahlung gelangen, und bezeichnen wir den Wert dieser Rente mit $\hat{R}_x$, so können wir uns diese Rente in die Summe mehrerer Renten zerlegt denken, und zwar: einer sofort beginnenden Rente im jährlich gleichbleibenden Betrage a_1, einer um 1 Jahr aufgeschobenen Rente im jährlichen Betrage $(a_2 - a_1)$, einer um 2 Jahre aufgeschobenen Rente im jährlichen Betrage $(a_3 - a_2)$ u. s. w.

Es ist mithin:

$$ \hat{R}_x = a_1 R_x + (a_2 - a_1)\,{}^{1}\overline{R}_x + (a_3 - a_2)\,{}^{2}\overline{R}_x + \ldots \qquad 1) $$

die allgemeine Form einer in von Jahr zu Jahr sich ändernden Beträgen zahlbaren Rente.

Diese Form umfafst zugleich alle bisher behandelten Rentenarten.

Für $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots$ geht sie in die lebenslängliche Leibrente über:

$$ \hat{R}_x = a_1 R_x. $$

Sind die Werte $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_k = 0$ und alle übrigen Werte $a_{k+1} = a_{k+2} = a_{k+3} = \ldots = a$ untereinander gleich, erhalten wir die aufgeschobene Rente:

$$ \hat{R}_x = a\,{}^{k}\overline{R}_x. $$

Ebenso erhalten wir aus 1) die kurze Rente, wenn $a_1 = a_2 = \ldots a_k$ und von a_{k+1} angefangen alle Werte von a gleich 0 sind.

Es ist dann:

$$\hat{R}_x = a_1 \overset{k}{\overline{R}}_x.$$

Bilden die Werte $a_1, a_2, a_3 \ldots$ eine steigende arithmetische Progression, erhalten wir eine steigende Rente u. s. w.

Setzen wir noch in 1)

$$a_1 = A_0, (a_2 - a_1) = A_1, (a_3 - a_2) = A_2,$$
$$\text{allgemein } (a_{k+1} - a_k) = A_k,$$

so erhalten wir:

$$\hat{R}_x = A_0 R_x + A_1 {}^1\overline{R}_x + A_2 {}^2\overline{R}_x + \ldots \qquad 2)$$

als allgemeinste Form einer Rente.

Ist die Rente eine unterjährige, ergiebt sich:

$$\hat{R}_x^{\frac{n}{n}} = A_0 R_x^{\frac{n}{n}} + A_1 {}^1\overline{R}_x^{\frac{n}{n}} + A_2 {}^2\overline{R}_x^{\frac{n}{n}} + \ldots =$$
$$= A_0 (R_x - \alpha) + A_1 \left({}^1\overline{R}_x - \frac{D_{x+1}}{D_x} \alpha \right)$$
$$+ A_2 \left({}^2\overline{R}_x - \frac{D_{x+2}}{D_x} \alpha \right) + \ldots$$
$$= A_0 R_x + A_1 {}^1\overline{R}_x + A_2 {}^2\overline{R}_x + \ldots$$
$$- \left(A_0 + \frac{D_{x+1}}{D_x} A_1 + \frac{D_{x+2}}{D_x} A_2 + \ldots \right) \alpha$$

$$\hat{R}_x^{\frac{n}{n}} = \hat{R}_x - \left(A_0 + \frac{D_{x+1}}{D_x} A_1 + \frac{D_{x+2}}{D_x} A_2 + \ldots \right) \alpha. \qquad 3)$$

Bilden wir die Differenz zwischen der Rente $\hat{R}_x$ und der gleichen, jedoch um ein Jahr aufgeschobenen Rente, finden wir:

$$\hat{\varDelta}_x = \hat{R}_x - {}^1\hat{\overline{R}}_x = A_0 R_x + A_1 {}^1\overline{R}_x + A_2 {}^2\overline{R}_x + \ldots$$
$$- (A_0 {}^1\overline{R}_x + A_1 {}^2\overline{R}_x + A_2 {}^3\overline{R}_x + \ldots)$$

$$\hat{\varDelta}_x = A_0 (R_x - {}^1\overline{R}_x) + A_1 ({}^1\overline{R}_x - {}^2\overline{R}_x) + A_2 ({}^2\overline{R}_x - {}^3\overline{R}_x) + \ldots$$

$$\hat{\varDelta}_x = A_0 + A_1 \frac{D_{x+1}}{D_x} + A_2 \frac{D_{x+2}}{D_x} + \ldots \qquad 4)$$

mithin aus 3)

$$\overset{\frac{n}{n}}{\hat{R}_x} = \hat{R}_x - \hat{\Delta}_x \alpha. \qquad 5)$$

Um den gegenwärtigen Wert irgend einer unterjährigen Rente zu finden, bilde man die Differenz zwischen derselben, jedoch ganzjährig zahlbaren und der um ein Jahr aufgeschobenen gleichen Rente und subtrahiere das α-fache dieser Differenz von dem Werte der ganzjährigen Rente; unter α ist hiebei $\frac{n-1}{2n}$ oder auch $\frac{r}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} \frac{k}{n+ki}$ zu verstehen.

Zweites Kapitel.

Einmal-Prämien der Ablebensversicherung.

§ 24. Einfache Ablebensversicherung.

Erlegt eine x-jährige Person bei einer Versicherungsanstalt den Betrag P_x, damit an ihre Hinterbliebenen am Ende des Jahres, in welchem sie stirbt, der Betrag 1 ausbezahlt werde, so ist P_x der gegenwärtige Wert oder die Einmal-Prämie der einfachen Ablebensversicherung.

Würden sämtliche L_x Personen der Sterbetafel vom Alter x eine solche Versicherung eingehen, würde die Einnahme der Anstalt $L_x P_x$ betragen; dagegen betragen die Ausgaben

im 1. Jahre $T_x = L_x - L_{x+1}$,
„ 2. „ $T_{x+1} = L_{x+1} - L_{x+2}$,
„ 3. „ $T_{x+2} = L_{x+2} - L_{x+3}$,
. . . .

der gegenwärtige Wert der Ausgaben

des 1. Jahres beträgt: $\frac{T_x}{r} = \frac{L_x - L_{x+1}}{r}$

„ 2. „ „ $\frac{T_{x+1}}{r^2} = \frac{L_{x+1} - L_{x+2}}{r^2}$

„ 3. „ „ $\frac{T_{x+2}}{r^3} = \frac{L_{x+2} - L_{x+3}}{r^3}$

. . . .

und da der gegenwärtige Wert der Einnahmen der Anstalt gleich sein mufs dem gegenwärtigen Werte ihrer Ausgaben, folgt:

$$L_x P_x = \frac{T_x}{r} + \frac{T_{x+1}}{r^2} + \frac{T_{x+2}}{r^3} + \dots$$

und

$$P_x = \frac{T_x}{L_x} \cdot \frac{1}{r} + \frac{T_{x+1}}{L_x} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{T_{x+2}}{L_x} \cdot \frac{1}{r^3} + \dots \qquad 1)$$

oder

$$P_x = \frac{L_x - L_{x+1}}{L_x r} + \frac{L_{x+1} - L_{x+2}}{L_x r^2} + \frac{L_{x+2} - L_{x+3}}{L_x r^3} + \dots \quad 2)$$

Zu den Formeln 1) oder 2) gelangen wir auch auf folgendem Wege mit Anwendung der Wahrscheinlichkeiten:

Die Wahrscheinlichkeit eines x-jährigen

im 1. Jahre zu sterben, ist: $\frac{T_x}{L_x} = \frac{L_x - L_{x+1}}{L_x}$

" 2. " " " " $\frac{T_{x+1}}{L_x} = \frac{L_{x+1} - L_{x+2}}{L_x}$

" 3. " " " " $\frac{T_{x+2}}{L_x} = \frac{L_{x+2} - L_{x+3}}{L_x}$

u. s. w.

Es ist daher der gegenwärtige Wert des für jeden Todesfall am Ende des Sterbejahres auszubezahlenden Betrages 1,

falls der Tod im 1. Jahre erfolgt: $\frac{T_x}{L_x} \cdot \frac{1}{r} = \frac{L_x - L_{x+1}}{L_x} \cdot \frac{1}{r}$

" " " " 2. " " $\frac{T_{x+1}}{L_x} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{L_{x+1} - L_{x+2}}{L_x} \frac{1}{r^2}$

" " " " 3. " " $\frac{T_{x+2}}{L_x} \cdot \frac{1}{r^3} = \frac{L_{x+2} - L_{x+3}}{L_x} \cdot \frac{1}{r^3}$

u. s. w.

Mithin wie vorhin:

$$P_x = \frac{T_x}{L_x} \frac{1}{r} + \frac{T_{x+1}}{L_x} \frac{1}{r^2} + \frac{T_{x+2}}{L_x} \frac{1}{r^3} + \dots \qquad 1)$$

oder auch:

$$P_x = \frac{L_x - L_{x+1}}{L_x}\frac{1}{r} + \frac{L_{x+1} - L_{x+2}}{L_x}\frac{1}{r^2} + \frac{L_{x+2} - L_{x+3}}{L_x}\frac{1}{r^3} + \ldots \quad 2)$$

Dividiren wir in 1) in jedem einzelnen Gliede Zähler und Nenner durch r^x und setzen $\frac{T_x}{r^{x+1}} = DT_x$, $\frac{T_{x+1}}{r^{x+2}} = DT_{x+1}$, ... allgemein $\frac{T_{x+k}}{r^{x+k+1}} = DT_{x+k}$, wo DT_x, DT_{x+1}, DT_{x+2} ... die diskontierten Zahlen der Toten genannt werden, so erhalten wir aus 1)

$$P_x = \frac{DT_x + DT_{x+1} + DT_{x+2} + \ldots}{D_x}$$

oder, wenn wir die Bezeichnung einführen:

$$\underbrace{DT_x + DT_{x+1} + DT_{x+2} + \ldots}_{\text{bis zum Ende der Sterbetafel}} = \Sigma DT_x$$

$$P_x = \frac{\Sigma DT_x}{D_x} \quad 3)$$

Diese Formel ist der Rentenformel: $R_x = \frac{\Sigma D_x}{D_x}$ ganz analog, nur ist im Zähler statt der Summe der diskontierten Zahlen der Lebenden die Summe der diskontierten Zahlen der Toten zu setzen.

Auch ist zu beachten, dafs die diskontierten Zahlen der Lebenden folgendermafsen definiert wurden: $D_x = \frac{L_x}{r^x}$, dagegen für die diskontierten Zahlen der Toten: $DT_x = \frac{T_x}{r^{x+1}}$.

---

§ 25. Schema zur Berechnung der Einmal-Prämien für die einfache Ablebensversicherung.

Die Werte von log D_x (Kolonne 10) in dem auf Seite 52 und 53 folgenden Schema zur Berechnung der Einmal-Prämien für die einfache Ablebensversicherung wurden bereits auf Seite 14 und 15 berechnet und von dort entnommen.

23 deutsche Gesellschaften, Männer mit vollständ. ärztl. Untersuchung. 3%

x	L_x	$T_x = L_x - L_{x+1}$	$\log T_x$	$\log \frac{1}{r^{x+1}}$	$\log DT_x = \log T_x + \log \frac{1}{r^{x+1}}$	DT_x	$\Sigma DT_x = \Sigma DT_{x+1} + DT_x$	$\log \Sigma DT_x$	$\log D_x$	$\log P_x = \log \Sigma DT_x - \log D_x$	P_x
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
89	1 382	1 382	3·140 508	0·844 650-2	1·985 158	96·6402	96·6402	1·985 158	1.997 995	0·987 163-1	0·970 874
88	1 829	447	2·650 308	857 487	507 795	32·1955	128·8357	2·110 036	2·132 539	977 497	949 504
87	2 394	565	752 048	870 325	622 373	41·915	170·751	232 363	262 286	970 077	933 420
86	3 106	712	852 480	883 162	735 642	54·405	225·156	352 483	388 200	964 283	921 050
85	3 998	892	950 365	895 999	846 364	70·204	295·360	470 352	510 679	959 673	911 324
84	5 075	1 077	3·032 216	908 836	941 052	87·308	382·668	582 822	627 110	955 712	903 050
83	6 348	1 273	104 828	921 674	2·026 502	106·292	488·960	689 273	737 148	952 125	895 622
82	7 809	1 461	164 650	934 511	099 161	125·650	614·610	788 600	839 943	948 657	888 500
81	9 425	1 616	208 441	947 348	155 789	143·149	757·759	879 531	934 466	945 065	881 180
80	11 167	1 742	241 048	960 185	201 233	158·940	916·699	962 227	3·020 959	941 268	873 510
79	13 019	1 852	267 641	973 022	240 663	174·05	1090·75	3·037 725	100 438	937 287	865 540
78	14 997	1 978	296 226	985 860	282 086	191·46	1282·21	107 959	174 701	933 258	857 548
77	17 088	2 091	320 354	998 697	319 051	208·47	1490·68	173 384	244 225	929 159	849 492
76	19 288	2 200	342 423	0·011 534-1	353 957	225·92	1716·60	234 669	309 658	925 011	841 416
75	21 576	2 288	359 456	024 371	383 827	242·01	1958·61	291 948	371 179	920 769	833 238
74	23 925	2 349	370 883	037 208	408 091	255·91	2214·52	345 280	428 898	916 382	824 863
73	26 324	2 399	380 030	050 046	430 076	269·20	2483·72	395 103	483 235	911 868	816 334
72	28 757	2 433	386 142	062 883	449 025	281·21	2764·93	441 684	534 464	907 220	807 644
71	31 221	2 464	391 641	075 720	467 361	293·33	3058·26	485 474	583 004	902 470	798 858
70	33 695	2 474	393 400	088 557	481 957	303·36	3361·62	526 549	628 960	897 589	789 930
69	36 163	2 468	392 345	101 395	493 740	311·70	3673·32	565 058	672 496	892 562	780 840
68	38 615	2 452	389 520	114 232	503 752	318·97	3992·29	601 222	713 825	887 397	771 608
67	41 036	2 421	383 995	127 069	511 064	324·39	4316·68	635 150	753 071	882 079	762 218

x	L_x	$T_x = L_x - L_{x+1}$	$\log T_x$	$\log \frac{1}{r^{x+1}}$	$\log D T_x = \log T_x + \log \frac{1}{r^{x+1}}$	$D T_x$	$\Sigma D T_x = \Sigma D T_{x+1} + D T_x$	$\log \Sigma D T_x$	$\log D_x$	$\log P_x = \log \Sigma D T_x - \log D_x$	P_x
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
							4316·68				
66	43 408	2 372	3·375 115	0·139 906-1	2·515 021	327·36	4644·04	3·666 896	3·790 313	0·876 583-1	0·752 632
65	45 733	2 325	366 423	152 743	519 166	330·50	4974·54	696 753	825 811	870 942	742 920
64	48 016	2 283	358 506	165 581	524 087	334·26	5308·80	724 996	859 804	865 192	733 148
63	50 256	2 240	350 248	178 418	528 666	337·80	5646·60	751 787	892 443	859 344	723 343
62	52 453	2 197	341 830	191 255	533 085	341·26	5987·86	777 272	923 862	853 410	713 527
61	54 601	2 148	332 034	204 092	536 126	343·66	6331·52	801 508	954 131	847 377	703 683
60	56 692	2 091	320 354	216 930	537 284	344·58	6676·10	824 523	983 289	841 234	693 800
59	58 711	2 019	305 136	229 767	534 903	342·69	7018·79	846 262	4·011 323	834 939	683 816
58	60 667	1 956	291 369	242 604	533 973	341·96	7360·75	866 922	038 394	828 528	673 795
57	62 550	1 883	274 850	255 441	530 291	339·07	7699·82	886 480	064 505	821 975	663 705
56	64 362	1 812	258 158	268 278	526 436	336·07	8035·89	905 034	089 746	815 288	653 564
55	66 103	1 741	240 799	281 116	521 915	332·59	8368·48	922 647	116 174	806 473	640 432
54	67 777	1 674	223 755	293 953	517 708	329·39	8697·87	939 412	137 872	801 540	633 199
53	69 378	1 601	204 391	306 790	511 181	324·47	9022·34	955 319	160 849	794 470	622 974
52	70 907	1 529	184 407	319 627	504 034	319·18	9341·52	970 418	183 154	787 264	612 723
51	72 365	1 458	163 758	332 465	496 223	313·49	9655·01	984 752	204 831	779 921	602 450
50	73 755	1 390	143 015	345 302	488 317	307·83	9962·84	998 383	225 930	772 453	592 179
49	75 077	1 322	121 231	358 139	479 370	301·56	10264·40	4·011 334	246 483	764 851	581 904
48	76 352	1 275	105 510	370 976	476 486	299·56	10563·96	023 826	266 633	757 193	571 732
47	77 591	1 239	093 071	383 813	476 884	299·84	10863·80	035 982	286 462	749 520	561 720
46	78 797	1 206	081 347	396 651	477 998	300·61	11164·41	047 836	305 998	741 838	551 871
45	79 976	1 179	071 514	409 488	481 002	302·69	11467·10	059 454	325 285	734 169	542 211
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

§ 26. Zusammenhang zwischen der Ablebens- und Rentenversicherung.

Wir haben für die einfache Ablebensversicherung aufser der Formel $P_x = \frac{\Sigma D\,T_x}{D_x}$ auch eine zweite Formel gefunden:

$$P_x = \frac{L_x - L_{x+1}}{L_x \,.\, r} + \frac{L_{x+1} - L_{x+2}}{L_x r^2} + \frac{L_{x+2} - L_{x+3}}{L_x r^3} + \ldots$$

die sich auch folgendermafsen schreiben läfst:

$$P_x = \left(\frac{L_x}{L_x} \cdot \frac{1}{r} + \frac{L_{x+1}}{L_x} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{L_{x+2}}{L_x} \frac{1}{r^3} + \ldots\right)$$

$$- \left(\frac{L_{x+1}}{L_x} \cdot \frac{1}{r} + \frac{L_{x+2}}{L_x} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{L_{x+3}}{L_x} \cdot \frac{1}{r^3} + \ldots\right)$$

oder

$$P_x = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{L_{x+1}}{L_x} \cdot \frac{1}{r} + \frac{L_{x+2}}{L_x} \frac{1}{r^2} + \ldots\right)$$

$$- \left(\frac{L_{x+1}}{L_x} \frac{1}{r} + \frac{L_{x+2}}{L_x} \frac{1}{r^2} + \frac{L_{x+3}}{L_x} \frac{1}{r^3} + \ldots\right)$$

Nun ist aber laut § 7, Formel 1)

$$1 + \frac{L_{x+1}}{L_x} \cdot \frac{1}{r} + \frac{L_{x+2}}{L_x} \frac{1}{r^2} + \ldots = R_x$$

mithin

$$\frac{L_{x+1}}{L_x} \cdot \frac{1}{r} + \frac{L_{x+2}}{L_x} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{L_{x+3}}{L_x} \cdot \frac{1}{r^3} + \ldots = R_x - 1$$

folglich

$$P_x = \frac{1}{r} R_x - (R_x - 1)$$

oder

$$P_x = 1 - \frac{r-1}{r} R_x = 1 - \frac{i}{r} R_x \qquad 1)$$

Mit Hilfe der Formel 1) kann die Einmal-Prämie der Ablebensversicherung auch direkt aus den Rentenwerten berechnet werden.

Da, wie bei den Zeitrenten entwickelt wurde, die ewige vorschüssige Rente gleich ist $\frac{r}{r-1}$ oder $\frac{r}{i}$, ist der Faktor $\frac{r-1}{r} = \frac{i}{r}$ in der Formel 1) der reziproke Wert der vorschüssigen ewigen Rente.

Zur Formel 1) können wir auch durch folgende Erwägung gelangen:

Erlegt eine x-jährige Person den Betrag 1, so kann sie, so lange sie lebt, die Zinsen dieses Betrages erhalten und am Ende des Jahres, in welchem sie stirbt, bleibt der Betrag 1, von dem bloſs die Zinsen verwendet wurden, vollständig übrig und kann an die Hinterbliebenen ausbezahlt werden.

Die Zinsen des Betrages 1 betragen jährlich i, zahlbar am Ende jedes Jahres; sollen sie am Anfange jedes Jahres bezahlt werden, so muſs i auf den Anfang des Jahres diskontiert werden, d. h. die am Anfange jedes Jahres fälligen Zinsen betragen $\frac{i}{r}$.

Man kann also für den Betrag 1 eine lebenslängliche vorschüssige Rente im jährlichen Betrage $\frac{i}{r}$ und eine Ablebensversicherung auf den Betrag 1 erwerben.

Es ist daher

$$1 = \frac{i}{r} R_x + P_x \qquad 2)$$

und hieraus, übereinstimmend mit Formel 1,

$$P_x = 1 - \frac{i}{r} R_x.$$

Wäre die Rente postnumerando zahlbar, würden die jährlichen Zinsen i betragen, und am Ende des Sterbejahres würde an die Hinterbliebenen der Betrag 1 nebst den noch nicht ausbezahlten Zinsen i des letzten Jahres ausbezahlt werden, daher

$$1 = i\,{}_{(1)}R_x + (1 + i)\,P_x \text{ oder } 1 = (r - 1)\,{}_{(1)}R_x + r\,P_x \qquad 3)$$

mithin

$$P_x = \frac{1}{r} - \frac{r-1}{r} {}_{(1)}R_x \qquad 4)$$

Zur Formel 4) gelangen wir auch aus 1), wenn daselbst $R_x = {}_{(1)}R_x + 1$ gesetzt wird.

---

§ 27. Schema zur Berechnung des Wertes der einfachen Ablebensversicherung aus dem Werte der vorschüssigen Rente.

$$\log \frac{i}{r} = \log \frac{0{\cdot}03}{1{\cdot}03} = \log \frac{3}{103} = 0{\cdot}477\,121 - 2{\cdot}012\,837$$
$$= 0{\cdot}464\,284 - 2.$$

x	R_x	$\log R_x$	$\log\left(\frac{i}{r} R_x\right) =$ $\log R_x + 0{\cdot}464284-2$	$\frac{i}{r} R_x$	$P_x =$ $1 - \frac{i}{r} R_x$
1	2	3	4	5	6
89	1	0·000 000	0·464 284–2	0·029 126	0·970 874
88	1·7336	0·238 946	0·703 230–2	0·050 493	0·949 507
87	2 2859	0·359 052	0·823 336–2	0·066 579	0·933 421
86	2·7106	0·433 059	0·897 343–2	0·078 948	0·921 052
85	3·0445	0·483 512	0·947 796–2	0·088 674	0·911 326
84	3·3285	0·522 251	0·986 535–2	0·096 947	0·903 053
83	3·5835	0·554 310	0·018 594–1	0·104 374	0·895 626
82	3·8282	0·582 998	0·047 282–1	0·111 502	0·888 498
81	4·0795	0·610 604	0·074 888–1	0·118 819	0·881 181
80	4·3428	0·637 770	0·102 054–1	0·126 489	0·873 511
.	.	.	.	.	.

---

§ 28. Aufgeschobene Ablebensversicherung oder Ablebensversicherung mit Karenz.

Soll der Betrag 1 an die Hinterbliebenen des Versicherten nur in dem Falle zur Auszahlung gelangen, wenn der Versicherte später stirbt, als innerhalb a Jahren vom Abschlusse der Versicherung gerechnet, so nennen wir dies eine um a Jahre aufgeschobene Ablebensversicherung oder eine Ablebensversicherung mit a-jähriger Karenz.

Wir erhalten den Wert ${}^{a}\overline{P}_x$ dieser Versicherung, wenn wir in der Formel

$$P_x = \frac{DT_x + DT_{x+1} + DT_{x+2} + \dots}{D_x}$$

für die einfache Ablebensversicherung die ersten a Glieder des Zählers weglassen, da in den ersten a Jahren eine Auszahlung nicht stattfindet.

Es ist daher

$${}^{a}\overline{P}_x = \frac{DT_{x+a} + DT_{x+a+1} + DT_{x+a+2} + \dots}{D_x} \qquad 1)$$

oder, analog mit der Formel für die aufgeschobene Rente:

$${}^{a}\overline{P}_x = \frac{\Sigma DT_{x+a}}{D_x} \dots \qquad 2)$$

Wir gelangen zur Formel 1) auch, wenn wir uns vorstellen, dafs die beim Abschlusse der Versicherung x Jahre alte Person eine Erlebensversicherung auf ein nach a Jahren fälliges Kapital eingeht, dessen Höhe gleich ist dem Werte der einfachen Ablebensversicherung für eine $(x + a)$-jährige Person.

Es ist daher:

$${}^{a}\overline{P}_x = {}^{a}E_x \cdot P_{x+a} = \frac{D_{x+a}}{D_x} \cdot \frac{\Sigma DT_{x+a}}{D_{x+a}}$$

oder

$${}^{a}\overline{P}_x = \frac{\Sigma DT_{x+a}}{D_x}$$

Schema zur Berechnung der Ablebensversicherung mit Karenz nach der Formel: ${}^{a}\overline{P}_x = \frac{\Sigma DT_{x+a}}{D_x}$.

x	$\log D_x$	$\log \Sigma DT_{x+1}$	$\log \Sigma DT_{x+2}$	$\log \Sigma DT_{x+3}$	$\log {}^{1}\overline{P}_x = \log \Sigma DT_{x+1} - \log D_x$
1	2	3	4	5	6
45	4·325 285	4·047 836	4·035 982	4·023 826	0·722 551−1
46	305 998	035 982	023 826	011 334	729 984
47	286 462	023 826	011 334	3·998 383	737 364
48	266 633	011 334	3·998 383	984 752	744 701
49	246 483	3·998 383	984 752	970 418	751 900
50	225 930	984 752	970 418	955 319	758 822
.	.	.	.	.	.

$\log {}^2\overline{P}_x = \log \Sigma D T_{x+2} - \log D_x$	$\log {}^3\overline{P}_x = \log \Sigma D T_{x+3} - \log D_x$	${}^1\overline{P}_x$	${}^2\overline{P}_x$	${}^3\overline{P}_x$	x
7	8	9	10	11	12
0·710 697—1	0·698 541—1	0·527 899	0·513 685	0·499 507	45
717 828	705 336	537 012	522 189	507 383	46
724 872	711 921	546 215	530 728	515 135	47
731 750	718 119	555 521	539 200	522 539	48
738 269	723 935	564 807	547 355	529 584	49
744 488	729 389	573 881	555 249	536 276	50
.	. .	.	.	.	.

Da auch wegen $T_{x+k} = L_{x+k} - L_{x+k+1}$

$$^a\overline{P}_x = \frac{L_{x+a} - L_{x+a+1}}{L_x \,.\, r^{a+1}} + \frac{L_{x+a+1} - L_{x+a+2}}{L_x \,.\, r^{a+2}} + \frac{L_{x+a+2} - L_{x+a+3}}{L_x \,.\, r^{a+3}} + \ldots$$

oder

$$^a\overline{P}_x = \frac{1}{r}\left(\frac{L_{x+a}}{L_x \,.\, r^a} + \frac{L_{x+a+1}}{L_x \,.\, r^{a+1}} + \frac{L_{x+a+2}}{L_x \,.\, r^{a+2}} + \ldots\right) - \left(\frac{L_{x+a+1}}{L_x \,.\, r^{a+1}} + \frac{L_{x+a+2}}{L_x \,.\, r^{a+2}} + \frac{L_{x+a+3}}{L_x \,.\, r^{a+3}} + \ldots\right)$$

und:

$$\frac{L_{x+a}}{L_x} \cdot \frac{1}{r^a} + \frac{L_{x+a+1}}{L_x} \cdot \frac{1}{r^{a+1}} + \frac{L_{x+a+2}}{L_x} \cdot \frac{1}{r^{a+2}} + \ldots = {}^a\overline{R}_x$$

mithin

$$\frac{L_{x+a+1}}{L_x} \cdot \frac{1}{r^{a+1}} + \frac{L_{x+a+2}}{L_x} \frac{1}{r^{a+2}} + \frac{L_{x+a+3}}{L_x} \cdot \frac{1}{r^{a+3}} + \ldots$$
$$= {}^a\overline{R}_x - \frac{L_{x+a}}{L_x} \cdot \frac{1}{r^a}$$
$$= {}^a\overline{R}_x - \frac{D_{x+a}}{D_x}$$

folgt:

$$^a\overline{P}_x = \frac{1}{r}\,{}^a\overline{R}_x - \left({}^a\overline{R}_x - \frac{D_{x+a}}{D_x}\right)$$

oder

$$^a\overline{P}_x = \frac{D_{x+a}}{D_x} - \frac{r-1}{r}\,{}^a\overline{R}_x \qquad 3)$$

welche Formel den Zusammenhang zwischen der aufgeschobenen Ablebensversicherung und der aufgeschobenen Rente zeigt.

Nun ist aber $\frac{D_{x+a}}{D_x}$ gleich der Differenz ${}^a\overline{\Delta}_x$ zwischen der um a und der um $(a+1)$ Jahre aufgeschobenen Rente, denn:

$$ {}^a\overline{\Delta}_x = {}^a\overline{R}_x - {}^{(a+1)}\overline{R}_x = \frac{\Sigma D_{x+a}}{D_x} - \frac{\Sigma D_{x+a+1}}{D_x} $$

$$ = \frac{\Sigma D_{x+a} - \Sigma D_{x+a+1}}{D_x} = \frac{D_{x+a}}{D_x} $$

die Formel 3) läſst sich daher auch schreiben:

$$ {}^a\overline{P}_x = {}^a\overline{\Delta}_x - \frac{r-1}{r}\, {}^a\overline{R}_x \ldots \qquad 4) $$

Wie wir später zeigen werden, gilt diese Relation zwischen Ablebens- und Rentenversicherung allgemein für jede Art der Ablebensversicherung.

Für die einfache Ablebensversicherung ist $\Delta_x = \mathrm{R}_x - {}^1\overline{R}_x = 1$, wir können daher statt $P_x = 1 - \frac{r-1}{r} R_x$ auch schreiben:

$$ P_x = (R_x - {}^1\overline{R}_x) - \frac{r-1}{r} R_x \text{ oder } P_x = \Delta_x - \frac{r-1}{r} R_x. $$

---

§ 29. Kurze oder temporäre Todesfallversicherung.

Soll die Versicherungsanstalt den Betrag 1 am Ende des Sterbejahres des Versicherten an seine Hinterbliebenen nur in dem Falle ausbezahlen, wenn der Versicherte innerhalb a Jahren nach dem Abschlusse der Versicherung stirbt, so heiſst diese Versicherungsart eine temporäre oder kurze Todesfallversicherung.

Der Wert $\overset{a}{\overline{P}}_x$ derselben wird erhalten, wenn in dem Werte $\frac{D\,T_x + D\,T_{x+1} + D\,T_{x+2} + \ldots}{D_x}$ der einfachen Ab-

lebensversicherung alle Glieder des Zählers nach dem a-ten weggelassen werden, es ist demnach

$$\overset{a}{\overline{P}}_x = \frac{DT_x + DT_{x+1} + DT_{x+2} + \ldots + DT_{x+a-1}}{D_x}$$

oder

$$\overset{a}{\overline{P}}_x = \frac{(DT_x + DT_{x+1} + \ldots + DT_{x+a-1} + DT_{x+a} + DT_{x+a+1} + \ldots) - (DT_{x+a} + DT_{x+a+1} + \ldots)}{D_x}$$

mithin

$$\overset{a}{\overline{P}}_x = \frac{\Sigma DT_x - \Sigma DT_{x+a}}{D_x} = \frac{\Sigma DT_x}{D_x} - \frac{\Sigma DT_{x+a}}{D_x} \qquad 1)$$

oder auch

$$\overset{a}{\overline{P}}_x = P_x - {}^a\overline{P}_x \qquad 2)$$

Da die einfache Ablebensversicherung sich aus der kurzen und aufgeschobenen Ablebensversicherung zusammensetzt, mufs

$$P_x = \overset{a}{\overline{P}}_x + {}^a\overline{P}_x$$

mithin, wie Formel 2)

$$\overset{a}{\overline{P}}_x = P_x - {}^a\overline{P}_x.$$

Schema zur Berechnung der kurzen Todesfallversicherung nach der Formel: $\overset{a}{\overline{P}}_x = P_x - {}^a\overline{P}_x$

x	P_x	${}^1\overline{P}_x$	${}^2\overline{P}_x$	${}^3\overline{P}_x$	$\overset{1}{\overline{P}}_x$	$\overset{2}{\overline{P}}_x$	$\overset{3}{\overline{P}}_x$
1	2	3	4	5	6	7	8
45	0.542 211	0·527 899	0·513 685	0·499 507	0·014 312	0·028 526	0·042 704
46	551 871	537 012	522 189	507 383	014 859	029 682	044 488
47	561 720	546 215	530 728	515 135	015 505	030 992	046 585
48	571 732	555 521	539 200	522 539	016 211	032 532	049 193
49	581 904	564 807	547 355	529 584	017 097	034 549	052 320
50	592 179	573 881	555 249	536 276	018 298	036 930	055 903
.	.						

Wären die Werte der aufgeschobenen Todesfallversicherung nicht bekannt, so müfste die kurze Todesfallversicherung nach der Formel berechnet werden:

$$\overset{a}{\overline{P}}_x = \frac{\Sigma D T_x - \Sigma D T_{x+a}}{D_x},$$

z. B.

$$\overset{10}{\overline{P}}_{45} = \frac{\Sigma D T_{45} - \Sigma D T_{55}}{D_{45}} = \frac{11467 \cdot 10 - 8368 \cdot 48}{21149} = \frac{3098 \cdot 62}{21149}$$

$$\begin{aligned} \log 3098 \cdot 62 &= 3 \cdot 491169 \\ \log 21149 &= 4 \cdot 325290 \\ \hline \log \overset{10}{\overline{P}}_{45} &= 0 \cdot 165879 - 1 \\ \overset{10}{\overline{P}}_{45} &= 0 \cdot 146514 \end{aligned}$$

---

§ 30. Steigende Todesfallversicherung.

Wie bei der steigenden Rente, können wir auch bei der steigenden Todesfallversicherung 3 Fälle unterscheiden.

1) Für jeden Todesfall des 1. Jahres ist der Betrag 1, für jeden Todesfall des 2. Jahres der Betrag 2, für jeden Todesfall des 3. Jahres der Betrag 3 u. s. w. am Ende des Sterbejahres auszubezahlen.

Der Wert dieser unbegrenzt steigenden Todesfallversicherung sei $\overset{\angle}{P}_x$.

Dann ist:

$$\overset{\angle}{P}_x = \frac{D T_x + 2 D T_{x+1} + 3 D T_{x+2} + \ldots}{D_x}$$

und da

$$\begin{aligned} & D T_x + 2 D T_{x+1} + 3 D T_{x+2} + \ldots \\ = & D T_x + D T_{x+1} + D T_{x+2} + D T_{x+3} + \ldots \\ & \quad + D T_{x+1} + D T_{x+2} + D T_{x+3} + \ldots \\ & \quad\quad + D T_{x+2} + D T_{x+3} + \ldots \\ & \quad\quad\quad + D T_{x+3} + \ldots \\ & \quad\quad\quad\quad + \ldots \end{aligned}$$

mithin:

$$\overset{\angle}{P}_x = \frac{\Sigma D T_x + \Sigma D T_{x+1} + \Sigma D T_{x+2} + \ldots}{D_x}$$

erhalten wir durch Einführung der Summe der Summen der diskontierten Zahlen der Toten:

$$\Sigma\Sigma D\,T_x = \Sigma D\,T_x + \Sigma D\,T_{x+1} + \Sigma D\,T_{x+2} + \ldots$$

für die unbegrenzt steigende Todesfallversicherung analog mit der unbegrenzt steigenden Rente

$$\overset{\angle}{P}_x = \frac{\Sigma\Sigma D\,T_x}{D_x} \qquad 1)$$

2) Der für die Sterbefälle der aufeinander folgenden Jahre auszuzahlende Betrag steigt nur durch a Jahre und bleibt dann für alle später eintretenden Sterbefälle konstant; der Wert dieser durch a Jahre steigenden und dann konstant bleibenden Todesfallversicherung sei ${}^{a\lceil}\overline{P}_x$.

$$ {}^{a\lceil}\overline{P}_x = \frac{D\,T_x + 2\,D\,T_{x+1} + 3\,D\,T_{x+2} + \ldots + a D\,T_{x+a-1}}{D_x}$$

$$\frac{+\,a D\,T_{x+a} + a D\,T_{x+a+1} + \ldots}{D_x}$$

Analog wie bei der entsprechenden steigenden Rente finden wir:

$${}^{a\lceil}\overline{P}_x = \frac{\Sigma\Sigma D\,T_x - \Sigma\Sigma D\,T_{x+a}}{D_x} \qquad 2)$$

3) Der für die Sterbefälle auszuzahlende Betrag steigt durch a Jahre von 1 bis a, während für die nach Ablauf von a Jahren eintretenden Sterbefälle nichts bezahlt wird. Der Wert dieser Ablebensversichung werde mit $\overset{a}{\underset{\angle}{}}P_x$ bezeichnet.

Es ist alsdann:

$$\overset{a}{\underset{\angle}{}}P_x = \frac{D\,T_x + 2\,D\,T_{x+1} + 3\,D\,T_{x+2} + \ldots + a D\,T_{x+a-1}}{D_x}$$

oder

$$\overset{a}{\underset{\angle}{}}P_x = \frac{\Sigma\Sigma D\,T_x - \Sigma\Sigma D\,T_{x+a} - a\,\Sigma D\,T_{x+a}}{D_x} \qquad 3)$$

Auf diese 3 Formeln lassen sich alle steigenden Todesfallversicherungen zurückführen.

So ist ${}^{a\lfloor\delta}{}_{\alpha}\overline{P}_x$ eine mit dem Betrage α beginnende, durch a Jahre jährlich um δ, also bis zum Höchstbetrage $\alpha + (a-1)\,\delta$ steigende und dann konstant bleibende Todesfallversicherung.

Es ist daher:

$$ {}^{a|}\overset{\delta}{\overline{P}}{}^{\alpha}_{x} = (\alpha - \delta)\, P_x + \delta\; {}^{a|}\overline{P}_x $$

$$ = \frac{(\alpha - \delta)\, \Sigma D T_x + \delta\,(\Sigma\Sigma D T_x - \Sigma\Sigma D T_{x+a})}{D_x} $$

${}^{k\angle\delta}_{a}\overline{P}{}^{\alpha}_{x}$ würde eine um a Jahre aufgeschobene, mit dem Betrage α beginnende, jährlich um δ steigende und nach Erreichung des Höchstbetrages $[\alpha + (k-1)\delta]$ aufhörende Todesfallversicherung bezeichnen.

$$ {}^{k\angle\delta}_{a}\overline{P}{}^{\alpha}_{x} = \frac{D_{x+a}}{D_x}\, {}^{k\angle\delta}\overline{P}{}^{\alpha}_{x+a} = \frac{D_{x+a}}{D_x}\left[(\alpha-\delta)\, {}^{k}\overline{P}_{x+a} + \delta\; {}^{k\angle}\overline{P}_{x+a}\right] $$

$$ = \frac{D_{x+a}}{D_x}\; \frac{(\alpha-\delta)(\Sigma D T_{x+a} - \Sigma D T_{x+a+k})}{D_{x+a}} $$

$$ + \frac{D_{x+a}}{D_x}\; \frac{\delta\,(\Sigma\Sigma D T_{x+a} - \Sigma\Sigma D T_{x+a+k} - k\,\Sigma D T_{x+a+k})}{D_{x+a}} $$

$$ {}^{k\angle\delta}_{a}\overline{P}{}^{\alpha}_{x} = \frac{(\alpha-\delta)\, \Sigma D T_{x+a} - (\alpha + \overline{k-1}\,\delta)\, \Sigma D T_{x+a+k}}{D_x} $$

$$ + \frac{\delta\,(\Sigma\Sigma D T_{x+a} - \Sigma\Sigma D T_{x+a+k})}{D_x} $$

Schema zur Berechnung der unbegrenzt steigenden Todesfallversicherung nach der Formel: $\overset{\angle}{P}_x = \frac{\Sigma\Sigma D T_x}{D_x}$.

x	ΣDT_x	$\Sigma\Sigma DT_x = \Sigma\Sigma DT_{x+1} + \Sigma DT_x$	log $\Sigma\Sigma DT_x$	log D_x	log $\overset{\angle}{P}_x =$ log $\Sigma\Sigma DT_x$ — log D_x	$\overset{\angle}{P}_x$
1	2	3	4	5	6	7
89	96·6402	96·6402	1·985 158	1·997 995	0·987 163–1	0·970 874
88	128·8357	225·476	2·353 100	2·132 539	0·220 561	1·661 73
87	170·751	396·227	597 944	262 286	335 658	2·166 00
86	225·156	621·383	793 359	388 200	405 159	2·541 91
85	295·360	916·743	962 247	510 679	451 568	2·828 57
84	382·668	1299·41	3·113 746	627 110	486 636	3·066 45
83	488·960	1788·37	252 457	737 148	515 309	3·275 74
82	614·610	2402·98	380 750	839 943	540 807	3·473 82
81	757·759	3160·74	499 789	934 466	565 323	3·675 56
80	916·699	4077·44	610 387	3·020 959	589 428	3·885 33
.	.	.	.	.	.	.

Für

$$\sqrt[6]{P_{80}} = \frac{\Sigma\Sigma DT_{80} - \Sigma\Sigma DT_{86}}{D_{80}} = \frac{4077{\cdot}44 - 621{\cdot}38}{1049{\cdot}44} = \frac{3456{\cdot}06}{1049{\cdot}44}$$

finden wir:

$$\log 3456{\cdot}06 = 3{\cdot}538581$$
$$\log 1049{\cdot}44 = \log D_{80} = 3{\cdot}020959$$
$$\log \sqrt[6]{P_{80}} = \quad 0{\cdot}517622$$
$$\sqrt[6]{P_{80}} = 3{\cdot}29323.$$

Ebenso finden wir für

$$\overset{6}{\angle}P_{80} = \frac{\Sigma\Sigma DT_{80} - \Sigma\Sigma DT_{86} - 6\Sigma DT_{86}}{D_x} =$$

$$= \frac{4077{\cdot}44 - 621{\cdot}383 - 6.225{\cdot}156}{1049{\cdot}44} = \frac{4077{\cdot}44 - 621{\cdot}383 - 1350{\cdot}936}{1049{\cdot}44}$$

$$\overset{6}{\angle}P_{80} = \frac{2105{\cdot}12}{1049{\cdot}44}$$

$$\log 2105{\cdot}12 = 3{\cdot}323277$$
$$\log 1049{\cdot}44 = \log D_{86} = 3{\cdot}020959$$
$$\log \overset{6}{\angle}P_{80} = \quad 0{\cdot}302318$$
$$\overset{6}{\angle}P_{80} = 2{\cdot}00594.$$

---

§ 31. Allgemeinste Form der Ablebensversicherung.

Wird für jeden Sterbefall des 1. Jahres der Betrag a_1, des 2. Jahres $a_2, \ldots$ des k-ten Jahres a_k ausbezahlt, so erhalten wir als allgemeinsten Fall der Ablebensversicherung

$$\hat{P}_x = a_1 P_x + (a_2 - a_1)\, {}^1\overline{P}_x + (a_3 - a_2)\, {}^2\overline{P}_x + (a_4 - {}_3)\, {}^3\overline{P}_x + \ldots \quad 1)$$

welcher alle möglichen Arten der Ablebensversicherung umfaſst.

Für $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots$ erhalten wir die einfache,

für $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$ und $a_{k+1} = a_{k+2} = a_{k+3} = \ldots = a$ die aufgeschobene,

für $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = a$ und $a_{k+1} = a_{k+2} = a_{k+3} = \ldots = 0$ die kurze,

für $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots = \delta$ die unbegrenzt steigende Ablebensversicherung u. s. w.

Setzen wir in 1):

$a_1 = A_0,\ a_2 - a_1 = A_1,\ a_3 - a_2 = A_2, \ldots\ a_{k+1} - a_k = A_k \ldots,$

so erhalten wir:

$$\hat{P}_x = A_0 P_x + A_1\, {}^1\overline{P}_x + A_2\, {}^2\overline{P}_x + \ldots A_k\, {}^k\overline{P}_x + \ldots \quad 2)$$

Da nun:

$$P_x = 1 - \frac{r-1}{r} R_x$$

und

$${}^k\overline{P}_x = \frac{D_{x+k}}{D_x} - \frac{r-1}{r}\, {}^k\overline{R}_x$$

folgt aus 2):

$$\hat{P}_x = \left(A_0 + A_1 \frac{D_{x+1}}{D_x} + A_2 \frac{D_{x+2}}{D_x} + \ldots\right)$$
$$- \frac{r-1}{r} (A_0 R_x + A_1\, {}^1\overline{R}_x + A_2\, {}^2\overline{R}_x + \ldots)$$

Setzen wir $\hat{R}_x$ gleich der auf dieselbe Weise gebildeten Rente, wie die Ablebensversicherung $\hat{P}_x$, also

$$\hat{R}_x = A_0 R_x + A_1\, {}^1\overline{R}_x + A_2\, {}^2\overline{R}_x + \ldots + A_k\, {}^k\overline{R}_x + \ldots \quad 3)$$

so ist

$${}^1\hat{\overline{R}}_x = A_0\, {}^1\overline{R}_x + A_1\, {}^2\overline{R}_x + A_2\, {}^3\overline{R}_x + \ldots + A_k\, {}^{(k+1)}\overline{R}_x + \ldots$$

und, da

$${}^k\overline{R}_x - {}^{(k+1)}\overline{R}_x = \frac{\Sigma D_{x+k} - \Sigma D_{x+k+1}}{D_x} = \frac{D_{x+k}}{D_x}$$

$$\hat{\varDelta}_x = \hat{R}_x - {}^1\hat{\overline{R}}_x = A_0 + A_1 \frac{D_{x+1}}{D_x} + A_2 \frac{D_{x+2}}{D^x} + \ldots$$

folglich

$$\hat{P}_x = \Delta_x - \frac{r-1}{r} \hat{R}_x . \qquad 4)$$

welche Formel den Zusammenhang zwischen einer beliebigen Form der Ablebensversicherung und der nach demselben Gesetze gebildeten Rente zeigt.

---

§ 32. Ablebensversicherung mit sofortiger Auszahlung nach erfolgtem Ableben.

Bisher wurde vorausgesetzt, dafs das versicherte Kapital 1 am Ende des Sterbejahres ausbezahlt wird. Soll die Auszahlung unmittelbar nach dem Ableben erfolgen, wollen wir vorerst den Wert $P_x^{\frac{1}{n}}$ der Ablebensversicherung unter der Annahme berechnen, dass am Schlusse jedes n-tel Jahres die für die in diesem n-tel Jahre vorgekommenen Sterbefälle entfallenden Versicherungsbeträge ausbezahlt werden.

Wird angenommen, dafs das Ableben innerhalb eines Jahres proportional der Zeit erfolgt, so entfallen auf ein n-tel Jahr im 1. Jahre $\frac{T_x}{n}$, im 2. Jahre $\frac{T_{x+1}}{n}$, im 3. Jahre $\frac{T_{x+2}}{n}$ ... Sterbefälle.

Werden die auszubezahlenden Beträge auf den Beginn der Versicherung diskontiert, erhalten wir

$$P_x^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{T_x}{nL_x} \frac{1}{r^{\frac{1}{n}}} + \frac{T_x}{nL_x} \frac{1}{r^{\frac{2}{n}}} + \ldots + \frac{T_x}{nL_x} \frac{1}{r^{\frac{n}{n}}} \right) +$$
$$+ \frac{1}{r} \left(\frac{T_{x+1}}{nL_x} \frac{1}{r^{\frac{1}{n}}} + \frac{T_{x+1}}{nL_x} \frac{1}{r^{\frac{2}{n}}} + \ldots + \frac{T_{x+1}}{nL_x} \frac{1}{r^{\frac{n}{n}}} \right) +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

wo die 1. Horizontalreihe die Auszahlungen des 1., die 2. die des 2. Jahres enthält u. s. w.

$$P_x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}} + \frac{1}{r^{\frac{2}{n}}} + \ldots + \frac{1}{r^{\frac{n}{n}}}\right)$$

$$\left(\frac{T_x}{L_x} + \frac{T_{x+1}}{L_x} \cdot \frac{1}{r} + \frac{T_{x+2}}{L_x}\frac{1}{r^2} + \ldots\right)$$

$$P_x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{r^{\frac{1}{n}}} + \frac{1}{r^{\frac{2}{n}}} + \ldots + \frac{1}{r^{\frac{n}{n}}}\right)$$

$$r\left(\frac{T_x}{L_x} \cdot \frac{1}{r} + \frac{T_{x+1}}{L_x} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{T_{x+2}}{L_x}\frac{1}{r^3} + \ldots\right)$$

und da: $\frac{T_x}{L_x}\frac{1}{r} + \frac{T_{x+1}}{L_x}\frac{1}{r^2} + \frac{T_{x+2}}{L_x}\frac{1}{r^3} + \ldots = P_x$

$$P_x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\left(r^{\frac{n-1}{n}} + r^{\frac{n-2}{n}} + \ldots + 1\right) P_x \qquad 1)$$

Da $r^{\frac{k}{n}} = (1+i)^{\frac{k}{n}} = 1 + \binom{\frac{k}{n}}{1} i + \binom{\frac{k}{n}}{2} i^2 + \ldots$

und bei Vernachlässigung der höheren Potenzen von i

$$r^{\frac{k}{n}} = 1 + \frac{k}{n} i$$

erhalten wir: $P_x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\left[\left(1 + \frac{n-1}{n} i\right) + \left(1 + \frac{n-2}{n} i\right) + \ldots\right.$

$$\left. + \left(1 + \frac{1}{n} i\right) + 1\right] P_x = \frac{1}{n}\left(n + \frac{1 + 2 + \ldots + \overline{n-1}}{n} i\right) P_x$$

$$= \frac{1}{n}\left[n + \frac{n(n-1)}{2n} i\right] P_x$$

$$P_x^{\frac{1}{n}} = \left(1 + \frac{n-1}{2n} i\right) P_x. \qquad 2)$$

Zu einem genaueren Werte gelangen wir aus Formel 1) durch Summierung der geometrischen Reihe:

$$r^{\frac{n-1}{n}} + r^{\frac{n-2}{n}} + \ldots + 1.$$

Es ist sodann:

$$P_x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \frac{r-1}{r^{\frac{1}{n}}-1} P_x. \tag{3}$$

Da sich die Sterbefälle auf das ganze Jahr verteilen, mufs das Jahr in unendlich viele Teile geteilt werden; für $n = \infty$ ist

$$\frac{n-1}{2n} = \frac{1-\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2}$$

mithin aus 2):

$$P_x^{\frac{1}{\infty}} = \left(1 + \frac{i}{2}\right) P_x. \tag{4}$$

Die Prämie P_x der einfachen Ablebensversicherung mufs demnach bei sofortiger Auszahlung nach erfolgtem Ableben um $\frac{i}{2} P_x$ erhöht werden.

Bei Anwendung der Formel 3)

$$P_x^{\frac{1}{n}} = (r-1) \frac{\frac{1}{n}}{r^{\frac{1}{n}}-1} P_x$$

erhalten wir, wenn wir setzen $\frac{1}{n} = \alpha$

$$P_x^{\frac{1}{n}} = (r-1) \frac{\alpha}{r^\alpha - 1} P_x$$

und da für $n = \infty$, α gleich 0 wird und

$$\lim \left(\frac{\alpha}{r^\alpha - 1}\right)_{\alpha=0} = \frac{1}{\log \text{nat } r}$$

$$P_x^{\frac{1}{\infty}} = \frac{i}{\log \text{nat } (1+i)} P_x. \tag{5}$$

Für die praktische Rechnung ist Formel 4) hinreichend genau.

Zur Formel 4) können wir auch direkt gelangen. Da sich die Sterbefälle auf das ganze Jahr gleichmäfsig verteilen, können wir annehmen, dafs sämtliche T_x Personen in der Mitte des 1. Jahres, sämtliche T_{x+1} Personen in der Mitte des 2. Jahres sterben u. s. w.

Auf den Beginn der Versicherung diskontiert, erhalten wir also

$$P_x^{\frac{1}{\infty}} = \frac{T_x}{L_x} \cdot \frac{1}{r^{\frac{1}{2}}} + \frac{T_{x+1}}{L_x} \frac{1}{r^{1+\frac{1}{2}}} + \frac{T_{x+2}}{L_x} \frac{1}{r^{2+\frac{1}{2}}} + \dots$$

$$= r^{\frac{1}{2}} \left(\frac{T_x}{L_x} \frac{1}{r} + \frac{T_{x+1}}{L_x} \frac{1}{r^2} + \frac{T_{x+2}}{L_x} \frac{1}{r^3} + \dots \right) = r^{\frac{1}{2}} P_x. \qquad 6)$$

Da weiters

$$r^{\frac{1}{2}} = (1+i)^{\frac{1}{2}} = 1 + \binom{\frac{1}{2}}{1} i + \binom{\frac{1}{2}}{2} i^2 + \dots = 1 + \frac{i}{2}$$

folgt, wenn wir die höheren Potenzen von i vernachlässigen, wie bereits gefunden:

$$P_x^{\frac{1}{\infty}} = \left(1 + \frac{i}{2}\right) P_x.$$

Bei 3 %iger Verzinsung ist $i = 0{\cdot}03$, mithin:

$$P_x^{\frac{1}{\infty}} = 1{\cdot}015\, P_x.$$

Drittes Kapitel.

Einmal-Prämien der gemischten Versicherung und der Versicherung à terme fixe.

§ 33. Gemischte Versicherung.

Versichert sich eine x-jährige Person in der Weise, dafs ihr nach a Jahren, falls sie noch am Leben ist, der Betrag 1 ausbezahlt werde, dagegen, falls sie früher sterben sollte, am Ende des Sterbejahres der Betrag 1 an ihre Hinterbliebenen auszubezahlen ist, heifst dies eine gemischte

Versicherung oder eine Versicherung auf Er- und Ableben.

Da es dasselbe ist, ob der Versicherte eine gemischte Versicherung oder zwei getrennte Versicherungen, eine Erlebensversicherung auf ein nach a Jahren fälliges Kapital 1 und eine kurze Ablebensversicherung auf a Jahre, gleichfalls auf den Betrag 1, eingeht, mufs der Wert ${}^aG_x$ der gemischten Versicherung gleich sein der Summe der Werte der Erlebens- und der kurzen Ablebensversicherung.

$$ {}^aG_x = {}^aE_x + \overset{a}{\overline{P}}_x \tag{1} $$

Da

$$ {}^aE_x = \frac{D_{x+a}}{D_x} \text{ und } \overset{a}{\overline{P}}_x = 1 - \frac{D_{x+a}}{D_x} - \frac{r-1}{r} \overset{a}{\overline{R}}_x, $$

ist

$$ {}^aG_x = 1 - \frac{r-1}{r} \overset{a}{\overline{R}}_x \tag{2} $$

Oder auch, wegen:

$$ {}^aE_x = \frac{D_{x+a}}{D_x} \text{ und } \overset{a}{\overline{P}}_x = \frac{\Sigma D T_x - \Sigma D T_{x+a}}{D_x} $$

$$ {}^aG_x = \frac{D_{x+a} + \Sigma D T_x - \Sigma D T_{x+a}}{D_x} \tag{3} $$

So ist z. B.

$$ {}^{10}G_{50} = \frac{D_{60} + \Sigma D T_{50} - \Sigma D T_{60}}{D_{50}} $$

$$ D_{60} = 9622{\cdot}5 $$
$$ \Sigma D T_{50} = 9962{\cdot}84 $$
$$ \Sigma D T_{60} = 6676{\cdot}10 $$
$$ \Sigma D T_{50} - \Sigma D T_{60} = 3286{\cdot}74 $$

mithin

$$ {}^{10}G_{50} = \frac{9622{\cdot}5 + 3286{\cdot}7}{D_{50}} = \frac{12909{\cdot}2}{16824} $$

$$ \log 12909{\cdot}2 = 4{\cdot}110900 $$
$$ \log 16824 = \log D_{50} = 4{\cdot}225930 $$
$$ \log {}^{10}G_{50} = 0.884970 - 1 $$
$$ {}^{10}G_{50} = 0{\cdot}767308 $$

Nach Formel 2) würden wir finden, da

$$\frac{10}{R_{50}} = \frac{\Sigma D_{50} - \Sigma D_{60}}{D_{50}} = \frac{235\,626 - 101\,160}{16\,824}$$

$$= \frac{134\,466}{16\,824} = 7{\cdot}992\,48$$

$$^{10}G_{50} = 1 - \frac{3}{103} \cdot 7{\cdot}992\,48 = 1 - 0{\cdot}232\,791 = 0{\cdot}767\,209$$

Die Abweichung der beiden Resultate folgt aus der Ungenauigkeit der logarithmischen Berechnung.

---

§ 34. Gemischte Versicherung mit eventuell zweimaliger Kapitalsauszahlung.

Die gemischte Versicherung mit eventuell zweimaliger Kapitalsauszahlung ist diejenige Versicherungsart, bei welcher der Betrag 1 nach a Jahren an den Versicherten, falls er noch am Leben ist, ausbezahlt und am Ende seines Sterbejahres an seine Hinterbliebenen gleichfalls der Betrag 1 ausbezahlt werden soll.

Stirbt der Versicherte vor Ablauf von a Jahren, so wird der Betrag 1 nur einmal, am Ende seines Sterbejahres ausbezahlt; stirbt er in einem späteren Zeitpunkte, wird der Betrag 1 zweimal ausbezahlt, das erstemal an ihn selbst bei Erreichung des Alters $(x + a)$, das zweitemal an seine Hinterbliebenen am Ende seines Sterbejahres.

Es ist leicht einzusehen, dafs diese Versicherungsart aus zwei getrennten Versicherungen besteht, einer Erlebensversicherung auf a Jahre und einer einfachen Ablebensversicherung. Es ist daher der Wert $^aG_x'$ dieser Versicherung:

$$^aG_x' = {^aE_x} + P_x \qquad 1)$$

und da

$$P_x = 1 - \frac{r-1}{r} R_x$$

auch

$$^aG_x' = 1 + \frac{D_{x+a}}{D_x} - \frac{r-1}{r} R_x \qquad 2)$$

Es ist ferner wegen

$$^aE_x = \frac{D_{x+a}}{D_x} \text{ und } P_x = \frac{\Sigma D T_x}{D_x}$$

auch:

$$^{a}G_x' = \frac{D_{x+a} + \Sigma D T_x}{D_x} \qquad 3)$$

So ist z. B.

$$^{10}G_{50}' = \frac{D_{60} + \Sigma D T_{50}}{D_{50}} = \frac{9622{\cdot}5 + 9962{\cdot}84}{16824} = \frac{19585{\cdot}3}{16824}$$

$$\begin{aligned} \log 19585{\cdot}3 &= 4{\cdot}291931 \\ \log 16824 = \log D_{50} &= 4{\cdot}225930 \\ \hline \log {}^{10}G_{50}' &= 0{\cdot}066001 \\ {}^{10}G_{50}' &= 1{\cdot}16413 \end{aligned}$$

oder, da

$$\begin{aligned} \log D_{60} &= 3{\cdot}983289 \\ \log D_{50} &= 4{\cdot}225930 \\ \hline \log {}^{10}E_{50} = \log D_{60} - \log D_{50} &= 0{\cdot}757359 - 1 \\ {}^{10}E_{50} &= 0{\cdot}571951 \\ P_{50} &= 0{\cdot}592179 \\ \hline {}^{10}G_{50}' = {}^{10}E_{50} + P_{50} &= 1{\cdot}164130 \end{aligned}$$

---

§ 35. Versicherung à terme fixe.
(Kapitalsversicherung mit bestimmter Verfallzeit.)

Versichert sich eine x-jährige Person in der Weise, daſs das versicherte Kapital 1 nach a Jahren entweder an sie selbst oder ihre Hinterbliebenen ausbezahlt werden soll, ohne Rücksicht darauf, ob der Versicherte nach a Jahren noch am Leben ist oder nicht, heiſst diese Versicherungsart eine Versicherung à terme fixe. Bezeichnen wir ihren Wert mit $^{a}\theta_x$.

Der Wert derselben ist von dem Leben oder Sterben des Versicherten vollständig unabhängig, es ist demnach, streng genommen, keine eigentliche Lebensversicherung. Diskontieren wir den nach a Jahren zahlbaren Betrag 1 auf die Zeit des Abschlusses der Versicherung, erhalten wir

$$^{a}\theta_x = \frac{1}{r^a} \qquad 1)$$

So ist z. B.

$$^{10}\theta_{50} = \frac{1}{1{\cdot}03^{10}}$$

$$\log {}^{10}\theta_{50} = 0{\cdot}871628 - 1$$

$$^{10}\theta_{50} = 0{\cdot}744095$$

Viertes Kapitel.

Jahres-Prämien.

§ 36. Begriff und allgemeine Ableitung der Jahres-Prämien.

Wir haben bisher den Wert der einzelnen Versicherungsarten ermittelt, es müfste demnach der Versicherte diesen Wert zur Zeit des Abschlusses der Versicherung auf einmal an die Versicherungsanstalt bezahlen, wir waren daher berechtigt, den Wert der einzelnen Versicherungsarten auch die Einmal-Prämie derselben zu nennen.

In der Regel wird jedoch vereinbart, dafs der Versicherte statt der Einmal-Prämie an die Versicherungsanstalt jährlich, gewöhnlich im vorhinein zahlbar, in den meisten Fällen gleichbleibende Zahlungen zu leisten hat, die man Jahres-Prämien nennt.

Die Zahlungen des Versicherten werden demnach eine entweder lebenslängliche oder kurze vorschüssige Rente bilden, deren Wert der Einmal-Prämie der betreffenden Versicherungsart gleich sein mufs.

Wir werden die Jahres-Prämie gewöhnlich mit demselben, jedoch kleinen Buchstaben bezeichnen, wie die Einmal-Prämie.

Ist die Einmal-Prämie irgend einer Versicherungsart V_x, die Jahres-Prämie v_x, die Art der Zahlung der Jahres-Prämie irgend eine Rentenart $\hat{R}_x$, mufs

$$V_x = v_x \cdot \hat{R}_x$$

also

$$v_x = \frac{V_x}{\hat{R}_x}. \qquad 1)$$

---

§ 37. Erlebensversicherung.

Hier wird die Jahres-Prämie ${}^{a}e_x$ in der Regel bis zum Fälligwerden des versicherten Erlebens-Kapitals bezahlt werden und bildet daher eine kurze Rente.

$${}^{a}E_x = {}^{a}e_x \overline{R}_x^{a}$$

und

$${}^{a}e_x = \frac{{}^{a}E_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x} = \frac{D_{x+a}}{\Sigma D_x - \Sigma D_{x+a}} \qquad 1)$$

Soll die Jahres-Prämie in unterjährigen Terminen bezahlt werden, ist

$${}^{a}e_x^{\frac{n}{n}} = \frac{{}^{a}E_x}{\overset{a}{\overline{R}}{}_x^{\frac{n}{n}}} \qquad 2)$$

z. B. $${}^{6}E_{50} = \frac{D_{56}}{D_{50}}$$

$$\log {}^{6}E_{50} = \log D_{56} - \log D_{50} = 4{\cdot}089746 - 4{\cdot}225930 = 0{\cdot}863816 - 1$$

$${}^{6}E_{50} = 0{\cdot}730830$$

$${}^{6}e_{50} = \frac{{}^{6}E_{50}}{\overset{6}{\overline{R}}_{50}} = \frac{{}^{6}E_{50}}{R_{50} - {}^{6}\overline{R}_{50}} = \frac{0{\cdot}730830}{14{\cdot}0053 - 8{\cdot}6926} = \frac{0{\cdot}730830}{5{\cdot}3127}$$

$$\log {}^{6}e_{50} = \log {}^{6}E_{50} - \log \overset{6}{\overline{R}}_{50} = 0{\cdot}863816 - 1$$
$$- 0{\cdot}725315$$
$$\log {}^{6}e_{50} = 0{\cdot}138501 - 1$$
$${}^{6}e_{50} = 0{\cdot}137563$$

---

§ 38. Aufgeschobene Rente.

Hier wird die Jahres-Prämie ${}^{a}\overline{r}_x$ in der Regel gleichfalls bis zum Beginne des Rentenbezuges gezahlt werden.

$${}^{a}\overline{r}_x = \frac{{}^{a}\overline{R}_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x} = \frac{\Sigma D_{x+a}}{\Sigma D_x - \Sigma D_{x+a}} \qquad 1)$$

und bei unterjähriger Zahlung der versicherten Rente sowohl, als auch der Jahres-Prämien

$$ {}^{a-\overline{n}}r_x^{\frac{n}{n}} = \frac{{}^{a}\overline{R}_x^{\frac{n}{n}}}{{}^{a}\overline{R}_x^{\frac{n}{n}}} \qquad 2) $$

---

§ 39. Altersrenten.

Wird die Jahres-Prämie auch hier bis zu dem mit dem Alter a des Versicherten beginnenden Rentenbezuge gezahlt, so ist

$$ {}^{(a-x)}\overline{R}_x = \frac{\Sigma D_a}{D_x} $$

die Einmal-Prämie,

$$ {}^{(a-x)}\overline{r}_x = \frac{{}^{(a-x)}\overline{R}_x}{\overline{R}_x^{a-x}} = \frac{\Sigma D_a}{\Sigma D_x - \Sigma D_a} \qquad 1) $$

die Jahres-Prämie.

So ist die Jahres-Prämie für einen 50-jährigen, zahlbar bis zum erreichten 60. Lebensjahre, für eine vom 60. Lebensjahre des Versicherten beginnende Altersrente nach Formel 1)

$$ {}^{(60-50)}\overline{r}_{50} = \frac{\Sigma D_{60}}{\Sigma D_{50} - \Sigma D_{60}} = \frac{101\,160 \cdot 4}{235626 - 101160} = \frac{101\,160 \cdot 4}{134466} $$

$$ \log 101\,160 \cdot 4 = \log \Sigma D_{60} = 5 \cdot 005\,011 $$
$$ \log 134466 = \quad 5 \cdot 128\,612 $$
$$ \log {}^{(60-50)}\overline{r}_{50} = \quad 0 \cdot 876\,399 - 1 $$
$$ {}^{(60-50)}\overline{r}_{50} = \quad 0 \cdot 752\,313 $$

Soll die Rente jährlich Mk. 1000. betragen, so ist hiefür vom 50. bis zum 60. Lebensjahre des Versicherten eine jährliche Prämie von Mk. 752.31 zu entrichten.

---

§ 40. Einfache Ablebensversicherung.

Hier sind 2 Fälle zu unterscheiden:

1) Die Jahres-Prämie p_x wird lebenslänglich gezahlt bei der Ablebensversicherung mit lebenslänglicher Prämienzahlung:

$$p_x = \frac{P_x}{R_x} = \frac{\Sigma D T_x}{\Sigma D_x} \qquad 1)$$

und da

$$P_x = 1 - \frac{r-1}{r} R_x$$

auch:

$$p_x = \frac{1 - \frac{r-1}{r} R_x}{R_x} = \frac{1}{R_x} - \frac{r-1}{r} \qquad 2)$$

Formel 1) wird angewendet, wenn uns nur die Grundtafeln der diskontierten Zahlen der Lebenden und Toten, Formel 2) dagegen, wenn uns die Rentenwerte zur Verfügung stehen.

2) Die Jahres-Prämie $\left(\frac{a}{p_x}\right)$ wird blofs durch a Jahre gezahlt bei der Ablebensversicherung mit abgekürzter Prämienzahlung.

$$\left(\frac{a}{p_x}\right) = \frac{P_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x} = \frac{\Sigma D T_x}{\Sigma D_x - \Sigma D_{x+a}} = \frac{1 - \frac{r-1}{r} R_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x}$$

$$= \frac{1}{\overset{a}{\overline{R}}_x} - \frac{r-1}{r} \frac{R_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x}. \qquad 3)$$

Da

$$\left(\frac{a}{p_x}\right) \overset{a}{\overline{R}}_x = p_x R_x = P_x$$

folgt auch:

$$\left(\frac{a}{p_x}\right) = p_x \frac{R_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x} \qquad 4)$$

Mit Hilfe der Formel 4) kann die Jahresprämie der Ablebensversicherung mit abgekürzter Prämienzahlung aus der Jahres-Prämie der Ablebensversicherung mit lebenslänglicher Prämienzahlung berechnet werden.

Wir lassen nun ein Beispiel zur Berechnung der lebenslänglichen Jahres-Prämie für eine Ablebensversicherung folgen, falls der Versicherte beim Abschlusse der Versicherung 50 Jahre alt ist.

Nach Formel 1) ist

$$p_{50} = \frac{P_{50}}{R_{50}} = \frac{0{\cdot}592179}{14{\cdot}0053}$$

$$\log P_{50} = 0{\cdot}772453 - 1$$
$$\log R_{50} = 1{\cdot}146293$$
$$\log p_{50} = 0{\cdot}626160 - 2$$
$$p_{50} = 0{\cdot}042282$$

Beträgt die Versicherungssumme Mk. 1000, so wird die Jahres-Prämie Mk. 42·28 betragen.

Sind blofs die diskontierten Zahlen der Lebenden und Toten bekannt, so ist aus 1) auch:

$$p_{50} = \frac{\Sigma D T_{50}}{\Sigma D_{50}}$$

$$\log p_{50} = \log \Sigma D T_{50} - \log \Sigma D_{50} = 3{\cdot}998383 - 5{\cdot}372223$$
$$= 0{\cdot}626160 - 2$$

wie vorhin.

Nach Formel 2) ist

$$p_{50} = \frac{1}{R_{50}} - \frac{0{\cdot}03}{1{\cdot}03}$$

$$\log R_{50} = 1{\cdot}146293$$

$$\log\left(\frac{1}{R_{50}}\right) = -1{\cdot}146293 = 0{\cdot}853707 - 2$$

$$\frac{1}{R_{50}} = 0{\cdot}0714015$$

$$\frac{0{\cdot}03}{1{\cdot}03} = 0{\cdot}0291262$$

$$p_{50} = 0{\cdot}0422753$$

welches Resultat von dem früheren nur um 0·000 007 abweicht.

Soll die Jahres-Prämie nicht lebenslänglich, sondern nur durch 20 Jahre gezahlt werden, so ist nach Formel 4)

$$\left(\overset{20}{\overline{p}}_{50}\right) = p_{50}\,\frac{R_{50}}{\overset{20}{\overline{R}}_{50}} = \frac{P_{50}}{\overset{20}{\overline{R}}_{50}}.$$

Da $\overset{20}{\overline{R}}_{50} = \frac{\Sigma D_{50} - \Sigma D_{70}}{D_{50}} = \frac{235626 - 30693}{16824} = \frac{204933}{16824}$

$$\log 204933 = 5{\cdot}311612$$
$$\log 16824 = \log D_{50} = 4{\cdot}225930$$
$$\log \overset{20}{\overline{R}}_{50} = 1{\cdot}085682$$

$$\log \left(\overset{20}{\overline{p}}_{50}\right) = \log P_{50} - \log \overset{20}{\overline{R}}_{50} = 0{\cdot}772453 - 1 - 1{\cdot}085682$$
$$= 0{\cdot}686771 - 2$$
$$\left(\overset{20}{\overline{p}}_{50}\right) = 0{\cdot}048615$$

Während bei lebenslänglicher Prämienzahlung die Jahres-Prämie für ein versichertes Kapital von Mk. 1000 für einen beim Abschlusse der Versicherung 50-jährigen Mk. 42·28 beträgt, mufs die Jahres-Prämie bei auf 20 Jahre abgekürzter Prämienzahlung Mk. 48·62 betragen.

---

§ 41. Ablebensversicherung mit Karenz.

Hier wird die Jahres-Prämie entweder

1) blofs die Aufschubszeit hindurch gezahlt.

$${}_{a}\overset{a}{\overline{p}}_x = \frac{{}^{a}\overline{P}_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x} = \frac{\Sigma D\, T_{x+a}}{\Sigma D_x - \Sigma D_{x+a}} = \frac{\Sigma D\, T_{x+a}}{\Sigma D_{x+a}} \cdot \frac{\Sigma D_{x+a}}{\Sigma D_x - \Sigma D_{x+a}}$$

$$= \frac{P_{x+a}}{R_{x+a}} \; \frac{{}^{a}\overline{R}_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x} \qquad 1)$$

$${}_{a}\overset{a}{\overline{p}}_x = p_{x+a} \frac{{}^{a}\overline{R}_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x} \qquad 2)$$

$${}_{a}\overset{a}{\overline{p}}_x = \frac{\frac{D_{x+a}}{D_x} - \frac{r-1}{r}\,{}^{a}\overline{R}_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x} = \frac{D_{x+a} - \frac{r-1}{r}\,\Sigma D_{x+a}}{\Sigma D_x - \Sigma D_{x+a}}$$

$$\frac{\Sigma D_{x+a} - r\,\Sigma D_{x+a+1}}{r(\Sigma D_x - \Sigma D_{x+a})} \qquad 3)$$

Formel 2) zeigt, wie die jährliche Prämie des x-jährigen bei der Ablebensversicherung mit Karenz durch die jährliche Prämie der einfachen Ablebensversicherung bei lebenslänglicher Prämienzahlung für den $(x+a)$-jährigen ausgedrückt werden kann.

Hier, wie auch in allen andern Fällen werden wir von den verschiedenen, uns zur Verfügung stehenden Formeln für dieselbe Prämie diejenige anwenden, mittels welcher sich die Rechnung aus den uns zur Verfügung stehenden Tafeln am bequemsten gestaltet.

2) Die Jahres-Prämie wird lebenslänglich gezahlt.

$$ {}^a\overline{p}_x = \frac{{}^a\overline{P}_x}{R_x} = \frac{\Sigma DT_{x+a}}{\Sigma D_x} = \frac{\Sigma DT_{x+a}}{\Sigma D_{x+a}} \cdot \frac{\Sigma D_{x+a}}{\Sigma D_x} = \frac{P_{x+a}}{R_{x+a}} \frac{{}^a\overline{R}_x}{R_x} $$

$$ = p_{x+a} \frac{{}^a\overline{R}_x}{R_x} \qquad 4) $$

oder auch:

$$ {}^a\overline{p}_x = \frac{\frac{D_{x+a}}{D_x} - \frac{r-1}{r}\,{}^a\overline{R}_x}{R_x} = \frac{\frac{1}{r}\Sigma D_{x+a} - \Sigma D_{x+a+1}}{\Sigma D_x} $$

$$ = \frac{\frac{1}{r}\,{}^a\overline{R}_x - {}^{(a+1)}\overline{R}_x}{R_x}. \qquad 5) $$

---

§ 42. Kurze Todesfallversicherung.

Hier wird die Jahres-Prämie längstens während der ganzen Dauer der Versicherung gezahlt. Stimmt die Dauer der Prämienzahlungen mit der Dauer der Versicherung überein, ergiebt sich:

$$ \overset{a}{\overline{p}}_x = \frac{\overset{a}{\overline{P}}_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x} = \frac{\Sigma DT_x - \Sigma DT_{x+a}}{\Sigma D_x - \Sigma D_{x+a}} = \frac{P_x - {}^a\overline{P}_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x} = \frac{P_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x} - \frac{{}^a\overline{P}_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x} $$

$$ = (\overset{a}{\overline{p}_x}) - {}^a\overline{p}_x \qquad 1) $$

oder auch:

$$\frac{a}{p_x} = \frac{1 - \frac{D_{x+a}}{D_x} - \frac{r-1}{r}\overset{a}{\bar{R}_x}}{\overset{a}{\bar{R}_x}} = \frac{1 - \frac{D_{x+a}}{D_x}}{\overset{a}{\bar{R}_x}} - \frac{r-1}{r}$$

$$= \frac{D_x - D_{x+a}}{\Sigma D_x - \Sigma D_{x+a}} - \frac{r-1}{r}.$$

§ 43. Gemischte Versicherung.

Hier wird die Jahres-Prämie in der Regel bis zum Fälligwerden des Erlebenskapitals gezahlt werden.

$$^{a}g_x = \frac{^{a}G_x}{\overset{a}{\bar{R}_x}} = \frac{1 - \frac{r-1}{r}\overset{a}{\bar{R}_x}}{\overset{a}{\bar{R}_x}} = \frac{1}{\overset{a}{\bar{R}_x}} - \frac{r-1}{r} \qquad 1)$$

oder auch:

$$^{a}g_x = \left(\frac{1}{\bar{R}_x} - \frac{r-1}{r}\right) + \left(\frac{1}{\overset{a}{\bar{R}_x}} - \frac{1}{\bar{R}_x}\right) = p_x + \frac{^{a}\bar{R}_x}{\overset{a}{\bar{R}_x}}\frac{1}{\bar{R}_x} =$$

$$p_x + \frac{^{a}\bar{R}_x}{\overset{a}{\bar{R}_x}}\left(\frac{1}{\bar{R}_x} - \frac{r-1}{r} + \frac{r-1}{r}\right) = p_x + \frac{^{a}\bar{R}_x}{\overset{a}{\bar{R}_x}}\left(p_x + \frac{r-1}{r}\right) \qquad 2)$$

Formel 1) ist vollständig analog gebildet der lebenslänglichen Jahres-Prämie p_x für die einfache Ablebensversicherung, Formel 2) zeigt, um wie viel die Jahres-Prämie $^{a}g_x$ für die gemischte Versicherung die Jahres-Prämie p_x für die einfache Ablebensversicherung übersteigt.

Soll die Jahres-Prämie für eine gemischte Versicherung für einen beim Abschlusse der Versicherung 50-jährigen Mann berechnet werden, falls das versicherte Kapital bei erreichtem 60. Lebensjahre des Versicherten, oder falls er früher stirbt, bei seinem Ableben ausbezahlt werden soll, so ist nach Formel 1):

$$^{10}g_{50} = \frac{1}{\overset{10}{\bar{R}_{50}}} - \frac{0{\cdot}03}{1{\cdot}03}.$$

In § 33 wurde gefunden:

$$\overset{10}{\overline{\overline{R}}}_{50} = 7{\cdot}99248$$

$$\log \overset{10}{\overline{\overline{R}}}_{50} = 0{\cdot}902682$$

$$\log \frac{1}{\overset{10}{\overline{\overline{R}}}_{50}} = 0{\cdot}097318 - 1$$

$$\frac{1}{\overset{10}{\overline{\overline{R}}}_{50}} = 0{\cdot}125117$$

$$\frac{0{\cdot}03}{1{\cdot}03} = 0{\cdot}029126$$

mithin

$$^{10}g_{50} = 0{\cdot}095991$$

Zu demselben Werte kommen wir, wenn wir den in § 33 gefundenen Wert von $^{10}G_{50}$ durch $\overset{10}{\overline{\overline{R}}}_{50}$ dividieren.

---

§ 44. Gemischte Versicherung mit eventuell zweimaliger Kapitalsauszahlung.

Die Jahres-Prämie kann bei dieser Versicherung

1. bis zum Fälligwerden des Erlebenskapitals gezahlt werden,

$$\overset{a}{\overline{\overline{}}}{}^{a}g_x' = \frac{^{a}G_x'}{\overset{a}{\overline{\overline{R}}}_x} = \frac{^{a}E_x + P_x}{\overset{a}{\overline{\overline{R}}}_x} = \frac{D_{x+a} + \Sigma D\, T_x}{\Sigma D_x - \Sigma D_{x+a}}$$

$$= \frac{\frac{D_{x+a}}{D_x} + 1 - \frac{r-1}{r} R_x}{\overset{a}{\overline{\overline{R}}}_x} = {}^{a}e_x + \left(\overset{a}{\overline{\overline{p}}}_x\right) \qquad 1)$$

2. lebenslänglich

$$^{a}g_x' = \frac{1 - \frac{r-1}{r} R_x + \frac{D_{x+a}}{D_x}}{R_x} = \left(\frac{1}{R_x} - \frac{r-1}{r}\right) + \frac{^{a}E_x}{R_x}$$

$$= p_x + \frac{^{a}E_x}{R_x}. \qquad 2)$$

Formel 2) zeigt, um wie viel die Prämie ${}^{a}g_x'$ die lebenslängliche Jahres-Prämie p_x der einfachen Ablebensversicherung übersteigt.

---

§ 45. Versicherung à terme fixe. (Kapitalsversicherung mit bestimmter Verfallszeit.)

Wird die Jahres-Prämie ${}^{a}\vartheta_x$ bis zum Fälligwerden des versicherten Kapitals gezahlt, ist

$$ {}^{a}\vartheta_x = \frac{{}^{a}\theta_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x} = \frac{1}{r^a \overset{a}{\overline{R}}_x}, $$

so ist z. B.

$$ {}^{10}\vartheta_{50} = \frac{{}^{10}\theta_{50}}{\overset{10}{\overline{R}}_{50}} $$

Im § 35 wurde gefunden:

$$ {}^{10}\theta_{50} = 0{\cdot}744095,\ \log {}^{10}\theta_{50} = 0{\cdot}871628 - 1. $$

Im § 33 wurde gefunden:

$$ \overset{10}{\overline{R}}_{50} = 7{\cdot}99248,\ \log \overset{10}{\overline{R}}_{50} = 0{\cdot}902682 $$

$$ \log {}^{10}\vartheta_{50} = 0{\cdot}968946 - 2 $$

$$ {}^{10}\vartheta_{50} = 0{\cdot}093099. $$

Beträgt das versicherte Kapital Mk. 1000.—, so sind als Jahres-Prämie 10 Jahre hindurch, vom 50. bis zum 60. Lebensjahre des Versicherten, je Mk. 93.10 zu entrichten.

Fünftes Kapitel.

Netto- und Brutto-Prämien.

§ 46. Einmalige und jährliche Brutto-Prämien.

Die Versicherungsanstalt muſs auſser dem Werte der Versicherung, d. h. auſser dem Werte der an die Versicherten auszuzahlenden Beträge auch andere Auslagen bestreiten, als Abschluſs-Provision, ärztliche Honorare, laufende Verwaltungskosten, Inkasso-Provisionen, Verzinsung des Aktien-Kapitals bei Aktiengesellschaften u. s. w. Die Anstalt muſs

daher die bisher ermittelten Prämien, die man auch Netto-Prämien nennt, um einen gewissen Betrag, den Prämienzuschlag, erhöhen, und hebt mithin von den Versicherten höhere als die Netto-Prämien, die sogenannten Brutto-Prämien ein.

Sämtliche, der Anstalt erwachsenden Regie-Auslagen lassen sich in 2 Gruppen teilen, als 1. einmalige Ausgaben, wie Abschlufs-Provision (Acquisitions-Prämie), ärztliches Honorar und 2. laufende Ausgaben, wie Verwaltungskosten, Inkasso-Provisionen etc.

Bezeichnet V_x die einmalige Netto-Prämie der betreffenden Versicherung, A_x die Summe der einmaligen Auslagen der Anstalt, B_x die Brutto-Prämie; nehmen wir ferner an, dafs die laufenden Ausgaben einen gewissen Prozentsatz der eingehobenen Brutto-Prämie, etwa mB_x betragen, wo $m < 1$, so mufs die Brutto-Prämie dazu dienen, um sowohl die einmalige Netto-Prämie als auch die einmaligen und die laufenden Regie-Auslagen zu decken.

Mithin

$$B_x = V_x + A_x + mB_x$$

folglich

$$B_x = \frac{V_x + A_x}{1 - m} = \frac{V_x}{1 - m} + \frac{A_x}{1 - m}.$$

Setzen wir noch $\frac{1}{1 - m} = \alpha$ (wo alsdann $\alpha > 1$) und $\frac{A_x}{1 - m} = \beta_x$, so erhalten wir

$$B_x = \alpha V_x + \beta_x \qquad 1)$$

als einmalige Brutto-Prämie.

Ist ferner v_x die jährliche Netto-Prämie, b_x die jährliche Brutto-Prämie irgend einer Versicherung, $\hat{R}_x$ der Wert derjenigen Rente im jährlichen Betrage 1, in welcher die Zahlung der Jahres-Prämie erfolgt, also $v_x = \frac{V_x}{\hat{R}}$, bezeichnet ferner A_x' die Summe der einmaligen, mb_x die jährlichen laufenden Ausgaben, so mufs

$$b_x \hat{R}_x = v_x \hat{R}_x + A_x' + mb_x \cdot \hat{R}_x$$

mithin

$$b_x = \frac{v_x \hat{R}_x + A_x'}{(1-m)\,\hat{R}_x} = \frac{v_x}{1-m} + \frac{A_x'}{(1-m)\,\hat{R}_x}$$

sein, und wenn wieder $\frac{1}{1-m} = \alpha$, ferner $\frac{A_x'}{(1-m)\,\hat{R}_x} = \beta_x'$

gesetzt wird, erhalten wir als jährliche Brutto-Prämie:

$$b_x = \alpha\, v_x + \beta_x'. \qquad 2)$$

Es wird sich also im allgemeinen sowohl die einmalige, als auch die jährliche Prämie in der Form $\alpha\pi_x + \beta_x$ darstellen lassen, wo π_x die einmalige oder jährliche Netto-Prämie bezeichnet und α ein konstanter Faktor $(\alpha > 1)$ ist.

Die einmaligen Regie-Auslagen werden im allgemeinen bei derselben Versicherungsart für Einmal- und Jahres-Prämien nicht gleich sein; die Acquisitions-Prämie selbst wird bei verschiedenen Anstalten auf verschiedener Basis bemessen, so entweder nach Prozenten des versicherten Betrages, nach Prozenten der Einmal-Prämie u. s. w. A_x und A_x' und ebenso $\beta_x = \frac{A_x}{1-m}$ und $\beta_x' = \frac{A_x'}{(1-m)\,\hat{R}_x}$ sind auch vom Beitrittsalter x des Versicherten abhängig, weshalb hier auch der Index x beigesetzt wurde.

Wenn wir davon absehen, dafs in der Abschlufs-Provision zumeist auch schon die Inkasso-Provision der Einmal-Prämie, beziehungsweise der ersten Jahres-Prämie bei jährlicher Prämienzahlung inbegriffen ist, und annehmen, dafs für dieselbe Versicherung die einmaligen Regie-Auslagen bei Einmal- und Jahres-Prämien gleich bleiben, also $A_x' = A_x$, so ist

$$b_x \hat{R}_x = V_x + A_x + m b_x \hat{R}_x$$

$$(1-m)\, b_x \hat{R}_x = V_x + A_x = (1-m)\, B_x$$

und

$$b_x = \frac{B_x}{\hat{R}_x}. \qquad 3)$$

Es wird also unter obigen Voraussetzungen die jährliche Brutto-Prämie aus der einmaligen ebenso abgeleitet, wie die jährliche Netto-Prämie aus der einmaligen.

In der Praxis wird häufig β_x als vom Alter unabhängig angenommen, so dafs: $B_x = \alpha V_x + \beta$ und $b_x = \alpha v_x + \beta$.

Sechstes Kapitel.

Gegenversicherung.

---

§ 47. Begriff der Gegenversicherung.

Bei der Erlebensversicherung, bei der Versicherung auf eine aufgeschobene Rente, bei der aufgeschobenen Todesfallversicherung wird die Versicherungsanstalt, falls der Versicherte vor dem Fälligwerden des versicherten Kapitals, beziehungsweise vor dem Ablaufe der Aufschubszeit, stirbt, an den Versicherten oder dessen Erben keinerlei Zahlung zu leisten haben.

Will nun der Versicherte aufser der Prämie für die eigentliche oder Hauptversicherung eine besondere Prämie zahlen, damit seinen Erben die Summe der für die Hauptversicherung gezahlten Prämien rückerstattet werde, falls die Anstalt wegen des vorzeitigen Ablebens des Versicherten an denselben keinerlei Zahlung leistete, so sagen wir, der Versicherte geht eine Gegenversicherung ein und wir wollen im folgenden die Prämie der Gegenversicherung bestimmen.

---

§ 48. Gegenversicherung bei Einmal-Prämien.

Ist V_x die einmalige Netto-Prämie der Hauptversicherung, a die Laufzeit der Erlebensversicherung, die Aufschubszeit der aufgeschobenen Rente oder der Todesfallversicherung mit Karenz, so hat die Anstalt gegen die Prämie $\Gamma(V_x)$ der Gegenversicherung den Betrag V_x auszubezahlen, falls der Versicherte vor Ablauf von a Jahren stirbt. — Nun ist aber eine solche Versicherung eine kurze Todesfallversicherung,

die Einmal-Prämie für eine kurze Todesfallversicherung auf a Jahre und den Betrag 1 gleich

$$\overset{a}{\overline{P}}_x = \frac{\Sigma D T_x - \Sigma D T_{x+a}}{D_x},$$

folglich für den Betrag V_x gleich

$$V_x \cdot \overset{a}{\overline{P}}_x.$$

Es ist also

$$\Gamma(V_x) = V_x \overset{a}{\overline{P}}_x. \tag{1}$$

Die Gegenversicherungs-Prämie beträgt daher für die Erlebensversicherung:

$$\Gamma({}^{a}E_x) = {}^{a}E_x \overset{a}{\overline{P}}_x; \tag{2}$$

für die aufgeschobene Rente:

$$\Gamma({}^{a}\overline{R}_x) = {}^{a}\overline{R}_x \overset{a}{\overline{P}}_x; \tag{3}$$

für die Ablebensversicherung mit Karenz:

$$\Gamma({}^{a}\overline{P}_x) = {}^{a}\overline{P}_x \overset{a}{\overline{P}}_x. \tag{4}$$

Es kann auch eine Gegenversicherung eingegangen werden für den Fall, dafs die Versicherungsanstalt aus dem Grunde keine Zahlungen zu leisten hat, weil der Versicherte die Dauer der Versicherung überlebt.

Beispielsweise bei der kurzen Todesfallversicherung auf a Jahre hat die Anstalt keinerlei Zahlung zu leisten, falls der Versicherte nach dem Abschlusse der Versicherung länger lebt, als a Jahre. — Hier hat also die Anstalt die Prämie $\overset{a}{\overline{P}}_x$ rückzuerstatten, falls der Versicherte nach a Jahren noch am Leben ist. Die Prämie der Gegenversicherung beträgt daher bei der kurzen Todesfallversicherung:

$$\Gamma(\overset{a}{\overline{P}}_x) = \overset{a}{\overline{P}}_x \cdot {}^{a}E_x. \tag{5}$$

Es ist leicht, aus den Formeln 1)—5) die Prämie der Gegenversicherung zu berechnen, falls die Prämie der Hauptversicherung nicht ganz, sondern nur zum Teil rückerstattet

werden soll; sollen beispielsweise bei der aufgeschobenen Rente π Prozent der Prämie rückerstattet werden, so ist die Prämie für die Gegenversicherung

$$\frac{\pi}{100}\,\Gamma({}^{a}\overline{R}_x) = \frac{\pi}{100}\,{}^{a}\overline{R}_x \overset{a}{\overline{P}}_x.$$

Als Beispiel sei die einmalige Gegenversicherungs-Prämie für die um 10 Jahre aufgeschobene Rente für einen 50jährigen zu berechnen.

Nach Formel 3) ist:

$$\Gamma({}^{10}\overline{R}_{50}) = {}^{10}\overline{R}_{50} \cdot \overset{10}{\overline{P}}_{50}$$

$${}^{10}\overline{R}_{50} = \frac{\Sigma D_{60}}{D_{50}} = 6{\cdot}0129 \text{ (siehe § 14)}$$

$$\log {}^{10}\overline{R}_{50} = 0{\cdot}779\,081 \text{ (siehe ebendaselbst).}$$

$$\overset{10}{\overline{P}}_{50} = \frac{\Sigma D T_{50} - \Sigma D T_{60}}{D_{50}} = \frac{9962{\cdot}84 - 6676{\cdot}10}{16824} = \frac{3286{\cdot}74}{16824}$$

$$\log 3286{\cdot}74 = 3{\cdot}516\,765$$
$$\log 16824 = \log D_{50} = 4{\cdot}225\,930$$

$$\log \overset{10}{\overline{P}}_{50} = 0{\cdot}290\,835 - 1$$
$$\log {}^{10}\overline{R}_{50} = 0{\cdot}779\,081$$

$$\log \Gamma({}^{10}\overline{R}_{50}) = 0{\cdot}069\,916$$
$$\Gamma({}^{10}\overline{R}_{50}) = 1{\cdot}174\,67.$$

Soll die vom 60. Lebensjahre an zu beziehende Rente jährlich Mk. 100 betragen, so sind mithin als Einmal-Prämie für die Hauptversicherung . . . . Mk. 601·29
und als Einmal-Prämie für die Gegenversicherung Mk. 117·47
zusammen Mk. 718·76

zu entrichten, wogegen die Anstalt, falls der Versicherte vor dem Beginne des Rentenbezuges stirbt, an die Hinterbliebenen die für die Hauptversicherung gezahlte Prämie von Mk. 601·29 rückzuvergüten hat.

§ 49. Gegenversicherung bei Jahres-Prämien.

Ist v_x die jährliche Netto-Prämie der Hauptversicherung und sind die Prämien rückzuerstatten, falls der Versicherte vor Ablauf von a Jahren stirbt, so beträgt der rückzuerstattende Betrag, falls der Versicherte im 1. Jahre stirbt, nachdem er eine Jahres-Prämie geleistet hat, v_x; stirbt er im 2. Jahre, so hat der Versicherte bereits 2 Jahres-Prämien geleistet, es sind daher rückzuerstatten $2v_x$; stirbt der Versicherte im 3. Jahre, so hat er bereits 3 Jahres-Prämien geleistet, es sind daher rückzuerstatten $3v_x$, u. s. w. — Stirbt der Versicherte im a-ten Jahre, nachdem er bereits a Jahres-Prämien geleistet hat, so ist der Betrag av_x rückzuerstatten.

Die Gegenversicherung bildet demnach eine steigende kurze Todesfallversicherung, indem die Beträge v_x, $2v_x$, $3v_x \ldots av_x$ rückzuerstatten sind, je nachdem der Versicherte im 1., 2., 3., ... a-ten Jahre stirbt.

Die Einmal-Prämie der durch a Jahre steigenden und dann aufhörenden Todesfallversicherung beträgt

$$\overset{a\angle}{P_x} = \frac{\Sigma\Sigma D\,T_x - \Sigma\Sigma D\,T_{x+a} - a\Sigma D\,T_{x+a}}{D_x},$$

falls die Beträge 1, 2, 3 ... a zu zahlen sind, wenn der Versicherte im 1., 2., 3. ... a-ten Jahre stirbt; sollen jedoch die Beträge v_x, $2v_x$, $3v_x \ldots av_x$ bezahlt werden, so ist die Einmal-Prämie hiefür:

$$\Gamma(v_x) = v_x \cdot \overset{a\angle}{P_x}. \qquad 1)$$

Soll die Gegenversicherungs-Prämie nicht auf einmal gezahlt, sondern durch gleichbleibende, a Jahre hindurch zahlbare Jahres-Prämien im jährlichen Betrage $\gamma(v_x)$ gedeckt werden, mufs

$$\gamma(v_x)\,\overset{a}{\overline{R}}_x = \Gamma(v_x)$$

folglich

$$\gamma(v_x) = \frac{\Gamma(v_x)}{\overset{a}{\overline{R}}_x} \qquad 2)$$

und nach Substituierung von

$$\Gamma(v_x) = v_x \cdot \overset{a\angle}{P_x}$$

erhalten wir:

$$\gamma(v_x) = v_x \frac{\overset{a\angle}{P_x}}{\overset{a}{\bar{R}_x}}. \qquad 3)$$

Wir erhalten daher als jährliche Gegenversicherungs-Prämie für die Erlebensversicherung:

$$\gamma(\overset{a}{e_x}) = \overset{a}{e_x} \frac{\overset{a\angle}{P_x}}{\overset{a}{\bar{R}_x}}; \qquad 4)$$

für die aufgeschobene Rente:

$$\gamma(\overset{a_}{r_x}) = \overset{a_}{r_x} \frac{\overset{a\angle}{P_x}}{\overset{a}{\bar{R}_x}}; \qquad 5)$$

für die Ablebensversicherung mit Karenz, falls sowohl die Prämie für die Haupt-, als auch für die Gegenversicherung durch a Jahre gezahlt wird:

$$\gamma(\overset{a\underline{a}}{p_x}) = \overset{a\underline{a}}{p_x} \frac{\overset{a\angle}{P_x}}{\overset{a}{\bar{R}_x}}. \qquad 6)$$

Die Gegenversicherung für die kurze Todesfallversicherung ist eine Erlebensversicherung, die Prämien der Hauptversicherung sind rückzuerstatten, falls der Versicherte nach a Jahren noch am Leben ist. Die Jahres-Prämie der kurzen Todesfallversicherung ist $\overset{\underline{a}}{p_x}$; falls der Versicherte nach a Jahren noch lebt, hat er bereits a Prämien gezahlt, es ist demnach der Betrag $a\overset{\underline{a}}{p_x}$ rückzuerstatten.

Die einmalige Gegenversicherungs-Prämie ist daher:

$$\Gamma(\overset{\underline{a}}{p_x}) = a.\overset{\underline{a}}{p_x}.\overset{a}{E_x}.$$

Die jährliche Prämie dagegen, falls die Gegenversicherung ebenso wie die Hauptversicherung in a Jahres-Prämien gezahlt wird:

$$\gamma(\overset{a}{\bar{p}}_x) = \frac{\Gamma(\overset{a}{\bar{p}}_x)}{\overset{a}{\bar{R}}_x} = a\overset{a}{\bar{p}}_x \frac{{}^aE_x}{\overset{a}{\bar{R}}_x} \tag{7}$$

oder auch, da

$$\frac{{}^aE_x}{\overset{a}{\bar{R}}_x} = {}^ae_x \text{ (Jahres-Prämie der Erlebensversicherung)}$$

$$\gamma(\overset{a}{\bar{p}}_x) = a\overset{a}{\bar{p}}_x\,{}^ae_x. \tag{8}$$

Siebentes Kapitel.

Prämien-Rückgewähr.

---

§ 50. Begriff der Prämien-Rückgewähr.

Bei denjenigen Versicherungsarten, bei denen es vorkommen kann, dafs die Anstalt an den Versicherten oder dessen Erben keinerlei Zahlungen leistet, weil, wie dies bei der Gegenversicherung gezeigt wurde, der Versicherte entweder vorzeitig stirbt oder die Dauer der Versicherung überlebt, wird es der Versicherte zumeist vorziehen, statt eine Gegen-Versicherungs-Prämie zu zahlen, damit ihm, beziehungsweise seinen Erben, in einem solchen Falle die Prämien für die Hauptversicherung rückerstattet werden, lieber eine solche Zusatz-Prämie zu zahlen, dafs ihm nicht nur die Prämien für die Hauptversicherung, sondern auch die Zusatz-Prämien rückerstattet werden. Wir nennen eine solche Versicherung eine Versicherung mit Rückgewähr der Prämien und werden die Prämie hiefür, worunter wir die Summe der Haupt- und Zusatz-Prämie verstehen wollen, mit der Prämie der betreffenden Hauptversicherung und einem über dem Alters-Index angebrachten Index ϱ bezeichnen. Ist ${}^a\bar{P}_x$ die Einmal-Prämie der Todesfallversicherung mit Karenz, so

bezeichne ${}^{a}\overline{P}_{\varrho|x}$ die Prämie derselben Versicherung einschliefslich der Zusatz-Prämie für die Rückgewähr. Wir wollen hier die zwei Fälle getrennt behandeln; 1) die Prämien sollen rückgezahlt werden, wenn der Versicherte innerhalb einer bestimmten Zeit stirbt, dann ist die Rückgewähr eine Todesfallversicherung; 2) die Prämien sollen rückerstattet werden, wenn der Versicherte nach einer bestimmten Zeit noch am Leben ist, dann ist die Rückgewähr eine Erlebensversicherung.

---

§ 51. Rückgewähr der Netto-Prämien.

a) Einmal-Prämien.

Ist V_x die Einmal-Prämie irgend einer Versicherung, $V_{\varrho|x}$ die Einmal-Prämie derselben Versicherung bei Rückgewähr der Prämien, so mufs die Prämie $V_{\varrho|x}$ dazu dienen, um sowohl die Haupt-Prämie, als auch die Rückgewähr der Prämie $V_{\varrho|x}$ zu decken.

Ist die Rückgewähr eine Todesfallversicherung, mufs

$$V_{\varrho|x} = V_x + V_{\varrho|x} \cdot \overset{a}{\overline{P}}_x$$

mithin

$$V_{\varrho|x} = \frac{V_x}{1 - \overset{a}{\overline{P}}_x} \tag{1}$$

Ist dagegen die Rückgewähr eine Erlebensversicherung, mufs

$$V_{\varrho|x} = V_x + V_{\varrho|x} \cdot {}^{a}E_x$$

und

$$V_{\varrho|x} = \frac{V_x}{1 - {}^{a}E_x} \tag{2}$$

Spezialfälle ad 1):

Erlebensversicherung:

$${}^{a}E_{\varrho|x} = \frac{{}^{a}E_x}{1 - \overset{a}{\overline{P}}_x} \tag{3}$$

Aufgeschobene Rente:

$$^{a}\overline{R}_{\varrho|x} = \frac{^{a}\overline{R}_x}{1 - \overset{a}{\overline{P}}_x} \tag{4}$$

Aufgeschobene Todesfallversicherung:

$$^{a}\overline{P}_{\varrho|x} = \frac{^{a}\overline{P}_x}{1 - \overset{a}{\overline{P}}_x} \tag{5}$$

Spezialfall ad 2):

Kurze Todesfallversicherung:

$$\overset{a}{\overline{P}}_{\varrho|x} = \frac{\overset{a}{\overline{P}}_x}{1 - {}^{a}E_x} \tag{6}$$

b) Jahres-Prämien.

Es sei v_x die durch a Jahre zahlbare Jahres-Prämie, $v_{\varrho|x}$ die gleichfalls durch a Jahre zahlbare Jahres-Prämie derselben Versicherung bei Rückgewähr der Prämien.

Die Rückgewähr sei eine Todesfallversicherung, es ist daher der Betrag $v_{\varrho|x}$, $2v_{\varrho|x}$, $3v_{\varrho|x}$, ... $av_{\varrho|x}$ rückzuerstatten, wenn der Versicherte im 1., 2., 3., ... a-ten Jahre stirbt, die Einmal-Prämie hierfür ist: $v_{\varrho|x}\overset{a\angle}{P}_x$.

Es ist daher

$$v_{\varrho|x}\overset{a}{\overline{R}}_x = v_x\overset{a}{\overline{R}}_x + v_{\varrho|x}\overset{a\angle}{P}_x$$

folglich

$$v_{\varrho|x} = \frac{v_x\overset{a}{\overline{R}}_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x - \overset{a\angle}{P}_x} = \frac{v_x}{1 - \dfrac{\overset{a\angle}{P}_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x}}. \tag{1}$$

Ist die Rückgewähr eine Erlebensversicherung, so ist dem Versicherten der Betrag $av_{\varrho|x}$ rückzuerstatten, falls er nach a Jahren noch am Leben ist; die Einmal-Prämie hiefür ist: $av_{\varrho|x}{}^{a}E_x$.

Es ist daher

$$v_{\varrho|x}\overset{a}{\overline{R}}_x = v_x\overset{a}{\overline{R}}_x + av_{\varrho|x}{}^{a}E_x$$

und

$$v_{\varrho|x} = \frac{v_x \overset{a}{\overline{R}}_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x - a\,{}^{a}E_x} = \frac{v_x}{1 - a\dfrac{{}^{a}E_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x}} = \frac{v_x}{1 - a\,{}^{a}e_x}. \tag{2}$$

Spezialfälle ad 1):

Erlebensversicherung:

$${}^{a}e_{\varrho|x} = \frac{{}^{a}e_x \overset{a}{\overline{R}}_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x - {}^{a\angle}P_x} = \frac{{}^{a}e_x}{1 - \dfrac{{}^{a\angle}P_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x}}. \tag{3}$$

Aufgeschobene Rente:

$${}^{a_}r_{\varrho|x} = \frac{{}^{a_}r_x . \overset{a}{\overline{R}}_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x - {}^{a\angle}P_x} = \frac{{}^{a_}r_x}{1 - \dfrac{{}^{a\angle}P_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x}}. \tag{4}$$

Aufgeschobene Todesfallversicherung:

$${}^{a\underline{a}}p_{\varrho|x} = \frac{{}^{a\underline{a}}p_x \overset{a}{\overline{R}}_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x - {}^{a\angle}P_x} = \frac{{}^{a\underline{a}}p_x}{1 - \dfrac{{}^{a\angle}P_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x}}. \tag{5}$$

Spezialfall ad 2):

Kurze Todesfallversicherung:

$$\overset{\underline{a}}{p}_{\varrho|x} = \frac{\overset{\underline{a}}{p}_x \overset{a}{\overline{R}}_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x - a\,{}^{a}E_x} = \frac{\overset{\underline{a}}{p}_x}{1 - a\,{}^{a}e_x}. \tag{6}$$

Als Beispiel sei die Einmal-Prämie samt Rückgewähr für eine um 10 Jahre aufgeschobene Rente für einen 50jährigen Mann zu berechnen.

Nach Formel 4) [a) Einmal-Prämien] ist:

$$^{10}\overline{R}_{\varrho/50} = \frac{^{10}\overline{R}_{50}}{1 - \overset{10}{\overline{P}}_{50}}.$$

Im § 48 wurde gefunden:

$$^{10}\overline{R}_{50} = 6{\cdot}0129,\quad \overset{10}{\overline{P}}_{50} = 0{\cdot}195\,36,$$

daher

$$^{10}\overline{R}_{\varrho/50} = \frac{6{\cdot}0129}{0{\cdot}80464}$$

$$\log 6{\cdot}0129 = 0{\cdot}779\,081$$
$$\log 0{\cdot}80464 = 0{\cdot}905\,602 - 1$$

$$\log {^{10}\overline{R}_{\varrho/50}} = 0{\cdot}873\,479$$
$$^{10}\overline{R}_{\varrho/50} = 7{\cdot}472\,72.$$

Soll die vom 60. Lebensjahre an vom Versicherten zu beziehende Rente jährlich Mk. 100 betragen, so hat der Versicherte als Einmal-Prämie Mk. 747·27 zu entrichten, wogegen die Versicherungsanstalt die gezahlte Gesamt-Prämie von Mk. 747·27 rückzuvergüten hat, falls der Versicherte vor erreichtem 60. Lebensjahre stirbt.

Bei dem im § 48 berechneten Beispiel beträgt die Gesamt-Prämie für dieselbe Rente blofs Mk. 718·76, die Anstalt hat jedoch, falls der Versicherte vor erreichtem 60. Lebensjahre stirbt, blofs Mk. 601·29 rückzuvergüten.

---

§ 52. Rückgewähr der Brutto-Prämien.

Ist $V'_{\varrho/x}$ die einmalige Netto-Prämie der Versicherung samt Rückgewähr der Brutto-Prämien, so wird die Anstalt von dem Versicherten die Brutto-Prämie $B_{\varrho/x} = \alpha V'_{\varrho/x} + \beta_x$ einheben und im Falle der Rückerstattung der Prämien auch die Brutto-Prämie rückerstatten müssen. Da jedoch nur die Netto-Prämie $V'_{\varrho/x}$ zur Deckung der Kosten der Versicherung und der Prämienrückgewähr, der Rest dagegen

zur Deckung der Regie-Auslagen dient, mufs, falls die Rückgewähr eine Todesfallversicherung ist:

$$V'_{\varrho|x} = V_x + (\alpha V'_{\varrho|x} + \beta_x)\overset{a}{\overline{P}}_x$$

und hieraus:

$$V'_{\varrho|x} = \frac{V_x + \beta_x \overset{a}{\overline{P}}_x}{1 - \alpha \overset{a}{\overline{P}}_x} \qquad 1)$$

woraus sich für die Brutto-Prämie $B_{\varrho|x} = \alpha V'_{\varrho|x} + \beta_x$ der Wert ergiebt:

$$B_{\varrho|x} = \frac{\alpha V_x + \beta_x}{1 - \alpha \overset{a}{\overline{P}}_x} = \frac{B_x}{1 - \alpha \overset{a}{\overline{P}}_x}. \qquad 2)$$

Ist die Rückgewähr eine Erlebensversicherung, mufs

$$V'_{\varrho|x} = V_x + (\alpha V'_{\varrho|x} + \beta_x)\, {}^aE_x$$

mithin

$$V'_{\varrho|x} = \frac{V_x + \beta_x\, {}^aE_x}{1 - \alpha\, {}^aE_x}. \qquad 3)$$

und

$$B_{\varrho|x} = \alpha V'_{\varrho|x} + \beta_x = \frac{\alpha V_x + \beta_x}{1 - \alpha\, {}^aE_x} = \frac{B_x}{1 - \alpha \cdot {}^aE_x}. \qquad 4)$$

Bei Jahres-Prämien haben wir, wenn die Rückgewähr eine Todesfallversicherung ist:

$$v'_{\varrho|x} \overset{a}{\overline{R}}_x = v_x \overset{a}{\overline{R}}_x + (\alpha v'_{\varrho|x} + \beta_x) \overset{a\angle}{P}_x$$

also

$$v'_{\varrho|x} = \frac{v_x \overset{a}{\overline{R}}_x + \beta_x \overset{a\angle}{P}_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x - \alpha \overset{a\angle}{P}_x} \qquad 5)$$

und

$$b_{\varrho|x} = \alpha v'_{\varrho|x} + \beta_x = \frac{\alpha v_x + \beta_x}{1 - \alpha \dfrac{\overset{a\angle}{P}_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x}} = \frac{b_x}{1 - \alpha \dfrac{\overset{a\angle}{P}_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x}}. \qquad 6)$$

Ist die Rückgewähr eine Erlebensversicherung, mufs

$$v'_{\varrho|x} \overset{a}{\overline{R}}_x = v_x \overset{a}{\overline{R}}_x + a(\alpha v'_{\varrho|x} + \beta_x)\,{}^a E_x$$

$$v'_{\varrho|x} = \frac{v_x \overset{a}{\overline{R}}_x + a \beta_x\,{}^a E_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x - a\alpha\,{}^a E_x} = \frac{v_x + a \cdot \beta_x\,{}^a e_x}{1 - a\alpha \cdot {}^a e_x} \qquad 7)$$

und

$$b_{\varrho|x} = \alpha v'_{\varrho|x} + \beta_x = \frac{\alpha v_x + \beta_x}{1 - \alpha \cdot a\,{}^a e_x} = \frac{b_x}{1 - \alpha \cdot a\,{}^a e_x} \qquad 8)$$

Achtes Kapitel.

Prämien-Reserve.

§ 53. Retrospektive und prospektive Prämien-Reserve.

Unter der Prämien-Reserve einer Versicherung verstehen wir den Wert der von dem Versicherten bis zum Zeitpunkte der Bestimmung der Prämien-Reserve bereits gezahlten Netto-Prämien vermindert um den Wert der von der Versicherungsanstalt bis zu diesem Zeitpunkte bereits geleisteten Zahlungen.

Die auf diese Weise definierte Prämien-Reserve nennt man auch retrospektive Prämien-Reserve.

Die Prämien-Reserve einer Versicherung läfst sich jedoch auch als Wert der von der Versicherungsanstalt vom Zeitpunkte der Bestimmung der Prämien-Reserve angefangen noch zu leistenden Zahlungen, vermindert um den Wert der von dem Versicherten von da ab noch zu zahlenden Netto-Prämien definieren, wir nennen sie dann prospektive Prämien-Reserve.

Es soll nun gezeigt werden, dafs die retrospektive und die prospektive Prämien-Reserve dieselben Werte ergeben.

Nehmen wir an, sämtliche L_x Lebenden des Alters x der Sterblichkeitstafel gehen eine Versicherung ein, jeder Versicherte habe als Prämie sofort den Betrag p_0, zu Beginn

des 2. Jahres die Prämie p_1, zu Beginn des 3. Jahres die Prämie $p_2, \ldots$ zu Beginn des $(k+1)$-ten Jahres die Prämie p_k zu zahlen, wogegen die Anstalt an jeden noch lebenden Versicherten zu Beginn des 1., 2., 3., ... $(k+1)$-ten Jahres den Betrag $m_0, m_1, m_2 \ldots m_k$ und am Ende des 1., 2., 3.... $(k+1)$-ten Jahres für jeden im Laufe des Jahres eingetretenen Todesfall den Betrag $c_0, c_1, c_2, \ldots c_k$ zu zahlen hat.

Es ist leicht einzusehen, dafs die derart definierte Versicherung alle möglichen Versicherungsarten auf ein Leben, und zwar sowohl gegen einmalige, (wenn $p_1 = p_2 = p_3 = \ldots = p_\omega = 0$) als auch gegen jährliche gleichbleibende Prämienzahlung, (wenn $p_0 = p_1 = p_2 = \ldots = p_\omega$) oder auch gegen steigende oder fallende Jahres-Prämien (wenn $p_0, p_1, p_2, \ldots p_\omega$ eine steigende oder fallende arithmetische Progression bilden) in sich schliefst.

Wir wollen nun sowohl die retrospektive, als auch die prospektive Prämien-Reserve dieser Versicherung nach n-jährigem Bestande derselben, d. h. für das Alter $(x+n)$ des Versicherten bestimmen.

Der auf das Alter $(x+n)$ des Versicherten aufgezinste Wert der bisherigen Einzahlungen sämtlicher Versicherten beträgt:

$$p_0 L_x r^n + p_1 L_{x+1} r^{n-1} + p_2 L_{x+2} r^{n-2} + \ldots + p_{n-1} L_{x+n-1} r$$

und da von den ursprünglichen L_x Versicherten nur noch L_{x+n} am Leben sind, ist der Wert P_x^{x+n} der bereits, d. i. vom Alter x bis zum Alter $(x+n)$ gezahlten Netto-Prämien für jeden einzelnen Versicherten:

$$P_x^{x+n} = \frac{1}{L_{x+n}} (p_0 L_x r^n + p_1 L_{x+1} r^{n-1} + p_2 L_{x+2} r^{n-2} + \ldots + p_{n-1} L_{x+n-1} r)$$

oder

$$P_x^{x+n} = \frac{1}{D_{x+n}} (p_0 D_x + p_1 D_{x+1} + p_2 D_{x+2} + \ldots + p_{n-1} D_{x+n-1}). \qquad 1)$$

Ebenso finden wir als Wert der künftig, d. i. vom Alter $(x+n)$ bis zum höchsten Alter ω zu zahlenden Prämien:

$$P_{x+n}^{\omega}=\frac{1}{L_{x+n}}\Big(p_n L_{x+n}+p_{n+1}\frac{L_{x+n+1}}{r}$$
$$+p_{n+2}\frac{L_{x+n+2}}{r^2}+\ldots+p_{\omega-x}\frac{L_\omega}{r^{\omega-x-n}}\Big)$$

oder

$$P_{x+n}^{\omega}=\frac{1}{D_{x+n}}(p_n D_{x+n}+p_{n+1}D_{x+n+1}$$
$$+p_{n+2}D_{x+n+2}+\ldots+p_{\omega-x}D_\omega) \qquad 2)$$

Als den auf jeden einzelnen Versicherten entfallenden Wert M_x^{x+n} der bisherigen und M_{x+n}^{ω} der künftigen Zahlungen der Anstalt an jeden Lebenden erhalten wir:

$$M_x^{x+n}=\frac{1}{L_{x+n}}(m_0 L_x r^n+m_1 L_{x+1} r^{n-1}$$
$$+m_2 L_{x+2} r^{n-2}+\ldots+m_{n-1} L_{x+n-1} r)$$

oder

$$M_x^{x+n}=\frac{1}{D_{x+n}}(m_0 D_x+m_1 D_{x+1}+m_2 D_{x+2}+\ldots$$
$$+m_{n-1} D_{x+n-1}) \qquad 3)$$

und

$$M_{x+n}^{\omega}=\frac{1}{L_{x+n}}\Big(m_n L_{x+n}+m_{n+1}\frac{L_{x+n+1}}{r}+m_{n+2}\frac{L_{x+n+2}}{r^2}$$
$$+\ldots+m_{\omega-x}\frac{L_\omega}{r^{\omega-x-n}}\Big)$$

oder

$$M_{x+n}^{\omega}=\frac{1}{D_{x+n}}(m_n D_{x+n}+m_{n+1}D_{x+n+1}+m_{n+2}D_{x+n+2}$$
$$+\ldots+m_{\omega-x}D_\omega). \qquad 4)$$

Endlich finden wir C_x^{x+n} und C_{x+n}^{ω} als Wert der bisherigen und der zukünftigen Zahlungen der Anstalt für die eintretenden Sterbefälle:

$$C_x^{x+n}=\frac{1}{L_{x+n}}(c_0 T_x r^{n-1}+c_1 T_{x+1} r^{n-2}+c_2 T_{x+2} r^{n-3}$$
$$+\ldots+c_{n-1} T_{x+n-1})$$

oder

$$C_x^{x+n} = \frac{1}{D_{x+n}} (c_0\, DT_x + c_1\, DT_{x+1} + c_2\, DT_{x+2} + \dots + c_{n-1}\, DT_{x+n-1}) \qquad 5)$$

und

$$C_{x+n}^{\omega} = \frac{1}{L_{x+n}} \left(c_n \frac{T_{x+n}}{r} + c_{n+1} \frac{T_{x+n+1}}{r^2} + c_{n+2} \frac{T_{x+n+2}}{r^3} + \dots + c_{\omega-x} \frac{T_\omega}{r^{\omega-x-n+1}} \right)$$

oder

$$C_{x+n}^{\omega} = \frac{1}{D_{x+n}} (c_n\, DT_{x+n} + c_{n+1} DT_{x+n+1} + c_{n+2}\, DT_{x+n+2} + \dots + c_{\omega-x}\, DT_\omega). \qquad 6)$$

Als retrospektive Prämien-Reserve erhalten wir:

$$\text{Retrosp. } res(n) = P_x^{x+n} - \left(M_x^{x+n} + C_x^{x+n}\right) \qquad 7)$$

und als prospektive Prämien-Reserve:

$$\text{Prosp. } res(n) = \left(M_{x+n}^{\omega} + C_{x+n}^{\omega}\right) - P_{x+n}^{\omega}. \qquad 8)$$

Da beim Abschlusse der Versicherung der Wert der Prämienzahlungen der Versicherten gleich sein mufs dem Werte der Leistungen der Versicherungsanstalt, mufs:

$$p_0\, L_x + p_1 \frac{L_{x+1}}{r} + p_2 \frac{L_{x+2}}{r^2} + \dots + p_{n-1} \frac{L_{x+n-1}}{r^{n-1}} + p_n \frac{L_{x+n}}{r^n} + \dots + p_{\omega-x} \frac{L_\omega}{r^{\omega-x}} =$$

$$\left(m_0\, L_x + m_1 \frac{L_{x+1}}{r} + m_2 \frac{L_{x+2}}{r^2} + \dots + m_{n-1} \frac{L_{x+n-1}}{r^{n-1}} + m_n \frac{L_{x+n}}{r^n} + \dots + m_{\omega-x} \frac{L_\omega}{r^{\omega-x}}\right) +$$

$$+ \left(c_0 \frac{T_x}{r} + c_1 \frac{T_{x+1}}{r^2} + c_2 \frac{T_{x+2}}{r^3} + \dots + c_{n-1} \frac{T_{x+n-1}}{r^n} + c_n \frac{T_{x+n}}{r^{n+1}} + \dots + c_{\omega-x} \frac{T_\omega}{r^{\omega-x+1}}\right) \qquad 9)$$

und nach Division der Gleichung 9) durch r^x:

$$p_0 D_x + p_1 D_{x+1} + p_2 D_{x+2} + \ldots + p_{n-1} D_{x+n-1} + p_n D_{x+n} + \ldots + p_{\omega-x} D_\omega =$$
$$(m_0 D_x + m_1 D_{x+1} + m_2 D_{x+2} + \ldots + m_{n-1} D_{x+n-1} + m_n D_{x+n} + \ldots + m_{\omega-x} D_\omega) +$$
$$+ (c_0 DT_x + c_1 DT_{x+1} + c_2 DT_{x+2} + \ldots + c_{n-1} DT_{x+n-1} + c_n DT_{x+n} + \ldots + c_{\omega-x} DT_\omega). \qquad 10)$$

Bei Berücksichtigung der Gleichungen 1)—6) geht die Gleichung 10) über in:

$$P_x^{x+n} D_{x+n} + P_{x+n}^{\omega} D_{x+n} = M_x^{x+n} D_{x+n} + M_{x+n}^{\omega} D_{x+n} + C_x^{x+n} D_{x+n} + C_{x+n}^{\omega} D_{x+n}$$

oder:

$$P_x^{x+n} + P_{x+n}^{\omega} = M_x^{x+n} + M_{x+n}^{\omega} + C_x^{x+n} + C_{x+n}^{\omega} \qquad 11)$$

mithin auch

$$P_x^{x+n} - \left(M_x^{x+n} + C_x^{x+n}\right) = \left(M_{x+n}^{\omega} + C_{x+n}^{\omega}\right) - P_{x+n}^{\omega}. \qquad 12)$$

folglich nach Berücksichtigung der Gleichungen 7) und 8):

Retrosp. *res* (n) = Prosp. *res* (n).

---

§ 54. Prämien-Reserve für Versicherungen mit einmaliger Prämienzahlung.

Es sei V_x die beim Versicherungsabschlusse, d. i. im Alter x des Versicherten zu zahlende Einmal-Prämie, V_x^{x+n} der Wert der Leistungen der Anstalt vom Alter x bis zum Alter $(x+n)$ des Versicherten, bezogen auf den Zeitpunkt des Versicherungsabschlusses, V_{x+n}^{ω} der Wert der Leistungen der Anstalt vom Alter $(x+n)$ des Versicherten angefangen für die ganze weitere Dauer der Versicherung, bezogen auf den Zeitpunkt von n Jahren nach dem Abschlusse der Versicherung; es soll die retrospektive und die prospektive Prämien-Reserve dieser Versicherung nach n-jährigem Bestande derselben bestimmt werden.

Nach der retrospektiven Methode mufs vorerst der Wert bestimmt werden, den die vom Versicherten gezahlte Einmal-Prämie V_x, sowie der Wert der von der Anstalt bereits geleisteten Zahlungen zur Zeit der Bestimmung der Prämien-Reserve, d. i. nach n-jährigem Versicherungsbestande haben.

Versichert sich jemand im Alter x auf ein nach n Jahren zahlbares Erlebens-Kapital 1, so mufs er als Einmal-Prämie ${}^nE_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$ zahlen; um sich auf den Betrag μ zu versichern, mufs er als Einmal-Prämie $\mu\,{}^nE_x = \mu \frac{D_{x+n}}{D_x}$ zahlen. Setzen wir $\mu\,{}^nE_x = 1$, folglich $\mu = \frac{1}{{}^nE_x} = \frac{D_x}{D_{x+n}}$, so heifst dies: für eine Einmal-Prämie im Betrage 1 erhält der Versicherte nach n Jahren, falls er noch am Leben ist, den Betrag $\frac{D_x}{D_{x+n}}$, oder: der Betrag 1 wächst nach n Jahren bei Berücksichtigung der Verzinsung und der Erlebenswahrscheinlichkeit auf $\frac{D_x}{D_{x+n}}$, der Wert V_x daher auf $\frac{V_x D_x}{D_{x+n}}$ und der Wert V_x^{x+n} auf $V_x^{x+n} \frac{D_x}{D_{x+n}}$ an.

Es ist mithin die Prämien-Reserve nach der retrospektiven Methode:

$$res_n(V_x) = \frac{D_x}{D_{x+n}}\left(V_x - V_x^{x+n}\right) = \frac{V_x - V_x^{x+n}}{{}^nE_x}. \quad 1)$$

Nach der prospektiven Methode finden wir, da der Versicherte keine Zahlungen mehr zu leisten hat,

$$res_n(V_x) = V_{x+n}^{\omega}. \quad 2)$$

Dafs die gefundenen Werte 1) und 2) einander gleich sein müssen, ist auch hier leicht einzusehen.

Der auf die Zeit des Versicherungsabschlusses bezogene Wert der Prämienzahlungen des Versicherten mufs dem auf denselben Zeitpunkt bezogenen Werte der Leistungen der Anstalt gleich sein.

V_x und V_x^{x+n} sind auf den Zeitpunkt des Versicherungsabschlusses, $\overset{\omega}{V}_{x+n}$ dagegen auf einen n Jahre späteren Zeitpunkt bezogen; ein nach n Jahren zahlbarer Betrag 1 ist unter Berücksichtigung der Verzinsung und der Erlebenswahrscheinlichkeit gegenwärtig $\frac{D_{x+n}}{D_x}$ wert, der Wert von $\overset{\omega}{V}_{x+n}$ beträgt daher zur Zeit des Versicherungsabschlusses $\overset{\omega}{V}_{x+n} \frac{D_{x+n}}{D_x}$.

Da beim Abschlusse der Versicherung der Wert der Prämienzahlungen der Versicherungen gleich sein mufs dem Werte der von der Anstalt zu leistenden Zahlungen, ergiebt sich:

$$V_x = V_x^{x+n} + \overset{\omega}{V}_{x+n} \frac{D_{x+n}}{D_x},$$

folglich:

$$\frac{D_x}{D_{x+n}}\left(V_x - V_x^{x+n}\right) = \overset{\omega}{V}_{x+n}. \qquad 3)$$

Retrospektive **Prospektive**

Prämien-Reserve der einzelnen Versicherungsarten.

Erlebensversicherung.

$$V_x = {}^aE_x = \frac{D_{x+a}}{D_x}; \quad V_x^{x+n} = 0; \quad \overset{\omega}{V}_{x+n} = {}^{(a-n)}E_{x+n}$$

$$= \frac{D_{x+a}}{D_{x+n}}; \quad n < a$$

$$res_n({}^aE_x) = \frac{D_x}{D_{x+n}} \cdot {}^aE_x = \frac{D_{x+a}}{D_{x+n}} \quad \Big| \quad res_n({}^aE_x) = {}^{(a-n)}E_{x+n} = \frac{D_{x+a}}{D_{x+n}}$$

Lebenslängliche Leibrente.

$$V_x = R_x; \quad V_x^{x+n} = \overset{n}{\overline{R}}_x; \quad \overset{\omega}{V}_{x+n} = R_{x+n}$$

$$res_n(R_x) = \frac{D_x}{D_{x+n}}(R_x - \overset{n}{\overline{R}}_x) = \frac{D_x}{D_{x+n}} \cdot {}^n\overline{R}_x = R_{x+n} \quad \Big| \quad res_n(R_x) = R_{x+n}$$

Retrospektive | **Prospektive**

Prämien-Reserve.

Aufgeschobene Leibrente.

1) $n < a$

$$V_x = {}^{a|}\overline{R}_x; \quad V_x^{x+n} = 0; \quad V_{x+n}^{\omega} = {}^{(a-n)|}\overline{R}_{x+n}$$

Retrospektive	Prospektive
$res_n({}^{a\vert}\overline{R}_x) = \frac{D_x}{D_{x+n}}\, {}^{a\vert}\overline{R}_x = \frac{\Sigma D_{x+a}}{D_{x+n}} = {}^{(a-n)\vert}\overline{R}_{x+n}$	$res_n({}^{a\vert}\overline{R}_x) = {}^{(a-n)\vert}\overline{R}_{x+n}$

2) $n > a$

$$V_x = {}^{a|}\overline{R}_x; \quad V_x^{x+n} = {}^{a|}\overset{n-a}{\overline{R}}_x; \quad V_{x+n}^{\omega} = R_{x+n}$$

Retrospektive	Prospektive
$res_n({}^{a\vert}\overline{R}_x) = \frac{D_x}{D_{x+n}}\left({}^{a\vert}\overline{R}_x - {}^{a\vert}\overset{n-a}{\overline{R}}_x\right) = \frac{D_x}{D_{x+n}}\, {}^{n\vert}\overline{R}_x = R_{x+n}$	$res_n({}^{a\vert}\overline{R}_x) = R_{x+n}$

Temporäre Leibrente.

$n < a$

$$V_x = \overset{a}{\overline{R}}_x; \quad V_x^{x+n} = \overset{n}{\overline{R}}_x; \quad V_{x+n}^{\omega} = \overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n}$$

Retrospektive	Prospektive
$res_n(\overset{a}{\overline{R}}_x) = \frac{D_x}{D_{x+n}}\left(\overset{a}{\overline{R}}_x - \overset{n}{\overline{R}}_x\right) = \frac{D_x}{D_{x+n}}\, {}^{n\vert}\overset{a-n}{\overline{R}}_x = \overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n}$	$res_n(\overset{a}{\overline{R}}_x) = \overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n}$

Einfache Ablebensversicherung.

$$V_x = P_x; \quad V_x^{x+n} = \overset{n}{\overline{P}}_x; \quad V_{x+n}^{\omega} = P_{x+n}$$

Retrospektive	Prospektive
$res_n(P_x) = \frac{D_x}{D_{x+n}}\left(P_x - \overset{n}{\overline{P}}_x\right) = \frac{D_x}{D_{x+n}}\, {}^{n\vert}\overline{P}_x = P_{x+n}.$	$res_n(P_x) = P_{x+n}.$

Retrospektive **Prospektive**

Prämien-Reserve.

Todesfallversicherung mit Karenz.

1) $n < a$

$$V_x = {}^{a}\overline{P}_x;\quad V_x^{x+n} = 0;\quad V_{x+n}^{\omega} = {}^{(a-n)}\overline{P}_{x+n}$$

Retrospektive:

$$res_n({}^{a}\overline{P}_x) = \frac{D_x}{D_{x+n}}\,{}^{a}\overline{P}_x = \frac{\Sigma D T_{x+a}}{D_{x+n}} = {}^{(a-n)}\overline{P}_{x+n}.$$

Prospektive:

$$res_n({}^{a}\overline{P}_x) = {}^{(a-n)}\overline{P}_{x+n}.$$

2) $n > a$

$$V_x = {}^{a}\overline{P}_x;\quad V_x^{x+n} = {}^{a}\overset{n-a}{\overline{P}}_x;\quad V_{x+n}^{\omega} = P_{x+n}$$

Retrospektive:

$$res_n({}^{a}\overline{P}_x) = \frac{D_x}{D_{x+n}}\left({}^{a}\overline{P}_x - {}^{a}\overset{n-a}{\overline{P}}_x\right) = \frac{D_x}{D_{x+n}}\,{}^{n}\overline{P}_x = P_{x+n}.$$

Prospektive:

$$res_n({}^{a}\overline{P}_x) = P_{x+n}.$$

Kurze Todesfallversicherung.

$n < a$

$$V_x = \overset{a}{\overline{P}}_x;\quad V_x^{x+n} = \overset{n}{\overline{P}}_x;\quad V_{x+n}^{\omega} = \overset{a-n}{\overline{P}}_{x+n}$$

Retrospektive:

$$res_n(\overset{a}{\overline{P}}_x) = \frac{D_x}{D_{x+n}}\left(\overset{a}{\overline{P}}_x - \overset{n}{\overline{P}}_x\right) = \frac{D_x}{D_{x+n}}\,{}^{n}\overset{(a-n)}{\overline{P}}_x = \overset{a-n}{\overline{P}}_{x+n}.$$

Prospektive:

$$res_n(\overset{a}{\overline{P}}_x) = \overset{a-n}{\overline{P}}_{x+n}.$$

Gemischte Versicherung.

$n < a$

$$V_x = {}^{a}G_x = 1 - \frac{r-1}{r}\overset{a}{\overline{R}}_x;\quad V_x^{x+n} = \overset{n}{\overline{P}}_x = 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} - \frac{r-1}{r}\overset{n}{\overline{R}}_x;$$

$$V_{x+n}^{\omega} = {}^{(a-n)}G_{x+n} = 1 - \frac{r-1}{r}\overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n}$$

Retrospektive **Prospektive**

Prämien-Reserve.

$$res_n({}^aG_x) = \frac{D_x}{D_{x+n}}\left[\left(1 - \frac{r-1}{r}\overset{a}{\bar{R}}_x\right) - \left(1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} - \frac{r-1}{r}\overset{n}{\bar{R}}_x\right)\right]$$

$$= \frac{D_x}{D_{x+n}}\left[\frac{D_{x+n}}{D_x} - \frac{r-1}{r}\left(\overset{a}{\bar{R}}_x - \overset{n}{\bar{R}}_x\right)\right]$$

$$= 1 - \frac{r-1}{r}\,{}_n\overset{a-n}{\bar{R}}_x \frac{D_x}{D_{x+n}}$$

$$= 1 - \frac{r-1}{r}\overset{a-n}{\bar{R}}_{x+n}.$$

$$res_n({}^aG_x) = 1 - \frac{r-1}{r}\overset{a-n}{\bar{R}}_{x+n}.$$

Aus den bisher behandelten Versicherungsarten ist ersichtlich, dafs sich die Anwendung der retrospektiven Methode zur Bestimmung der Prämien-Reserve nur dann empfiehlt, wenn $V_x^{x+n} = 0$, d. h. wenn der Wert der Leistungen der Versicherungsanstalt bis zum Zeitpunkte der Bestimmung der Prämien-Reserve $= 0$ ist.

---

§ 55. Prämien-Reserve für Versicherungen mit jährlicher Prämienzahlung.

Ist V_x die Einmal-Prämie, v_x die Jahres-Prämie der betreffenden Versicherung, $\hat{R}_x$ der Wert der Rente, in welcher die Jahres-Prämie gezahlt wird (lebenslängliche, temporäre, steigende, fallende Rente), $\hat{R}_x^{x+n}$ der Wert derselben, sich jedoch nur vom Alter x bis zum Alter $(x+n)$ des Versicherten erstreckenden Rente, $\hat{R}_{x+n}^{\omega}$ der Wert derselben, jedoch erst vom Alter $(x+n)$ des Versicherten beginnenden Rente, V_x^{x+n} der Wert der von der Ver-

sicherungsanstalt vom Alter x bis zum Alter $(x+n)$ des Versicherten, V_{x+n}^{ω} der Wert der von der Anstalt vom Alter $(x+n)$ des Versicherten an zu leistenden Zahlungen, so ist der Wert der Zahlungen des Versicherten bis zum Zeitpunkte der Bestimmung der Prämien-Reserve, d. i. bis zum Alter $(x+n)$ des Versicherten, $v_x \hat{R}_x^{x+n}$, der Wert der Leistungen der Anstalt bis zu diesem Zeitpunkte V_x^{x+n}; diese beiden Werte beziehen sich jedoch auf den Zeitpunkt des Versicherungsabschlusses; nach n Jahren, zur Zeit der Bestimmung der Prämien-Reserve, betragen dieselben

$$v_x \hat{R}_x^{x+n} \cdot \frac{D_x}{D_{x+n}}, \text{ beziehungsweise } V_x^{x+n} \cdot \frac{D_x}{D_{x+n}}.$$

Da die retrospektive Prämien-Reserve gleich ist dem Werte der bisherigen Prämienzahlungen des Versicherten, vermindert um den Wert der bisherigen Leistungen der Anstalt, erhalten wir als retrospektive Prämien-Reserve nach n Jahren:

$$res\,(n) = \left(v_x \hat{R}_x^{x+n} - V_x^{x+n}\right) \frac{D_x}{D_{x+n}} \qquad 1)$$

und aus dem Werte der künftigen Leistungen der Anstalt, vermindert um den Wert der künftigen Prämienzahlungen des Versicherten als prospektive Prämien-Reserve nach n Jahren:

$$res\,(n) = V_{x+n}^{\omega} - v_x \hat{R}_{x+n}^{\omega}. \qquad 2)$$

Dafs die retrospektive und prospektive Prämien-Reserve denselben Wert haben, ist auch hier leicht einzusehen.

Der Gesamtwert V_x der Leistungen der Anstalt besteht aus dem Werte der bisherigen und dem auf den Zeitpunkt des Versicherungsabschlusses diskontierten Werte der künftigen Zahlungen.

$$V_x = V_x^{x+n} + V_{x+n}^{\omega} \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

Ebenso ist

$$v_x \hat{R}_x = v_x \hat{R}_x^{x+n} + v_x \hat{R}_{x+n}^{\omega} \frac{D_{x+n}}{D_x}.$$

Da der Gesamtwert der Leistungen der Anstalt gleich ist dem Gesamtwerte der Prämienzahlungen des Versicherten

$$V_x = v_x \hat{R}_x$$

folgt weiters

$$v_x \hat{R}_x^{x+n} + v_x \hat{R}_{x+n}^{\omega} \frac{D_{x+n}}{D_x} = V_x^{x+n} + V_{x+n}^{\omega} \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

und hieraus

$$\left(v_x \hat{R}_x^{x+n} - V_x^{x+n}\right) \frac{D_x}{D_{x+n}} = V_{x+n}^{\omega} - v_x \hat{R}_{x+n}^{\omega}. \quad 3)$$

Retrospektive | **Prospektive**

Prämien-Reserve der einzelnen Versicherungsarten.

Erlebensversicherung.

$$n < a$$

$$v_x = \frac{D_{x+a}}{D_x \overset{a}{\overline{R}}_x} = {}^{a}e_x; \quad \hat{R}_x^{x+n} = \overset{n}{\overline{R}}_x; \quad \hat{R}_{x+n}^{\omega} = \overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n}; \quad V_x^{x+n} = 0;$$

$$V_{x+n}^{\omega} = {}^{(a-n)}E_{x+n} = \frac{D_{x+a}}{D_{x+n}}$$

Retrospektive:

$$res(n) = {}^{a}e_x \overset{n}{\overline{R}}_x \frac{D_x}{D_{x+n}} = \frac{{}^{a}e_x}{\dfrac{D_{x+n}}{D_x \overset{n}{\overline{R}}_x}} = \frac{{}^{a}e_x}{{}^{n}e_x}$$

Prospektive:

$$res(n) = \frac{D_{x+a}}{D_{x+n}} - {}^{a}e_x \overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n}$$

Aufgeschobene Leibrente.

$$1) \; n < a$$

$$V_x = {}^{a}\overline{R}_x; \quad \hat{R}_x = \overset{a}{\overline{R}}_x; \quad v_x = \frac{{}^{a}\overline{R}_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x} = {}^{a}\bar{r}_x; \quad \hat{R}_x^{x+n} = \overset{n}{\overline{R}}_x;$$

$$\hat{R}_{x+n}^{\omega} = \overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n}; \quad V_x^{x+n} = 0; \quad V_{x+n}^{\omega} = {}^{(a-n)}\overline{R}_{x+n}$$

Retrospektive:

$$res(n) = {}^{a}\bar{r}_x \overset{n}{\overline{R}}_x \frac{D_x}{D_{x+n}} = \frac{{}^{a}\bar{r}_x}{{}^{n}e_x}.$$

Prospektive:

$$res(n) = {}^{(a-n)}\overline{R}_{x+n} - {}^{a}\bar{r}_x \overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n}.$$

Retrospektive **Prospektive**

Prämien-Reserve.

2) $n > a$

$$\hat{R}_x^{x+n} = \overset{a}{\overline{R}}_x;\quad \hat{R}^{\omega}_{x+n} = 0;\quad V_x^{x+n} = {}^{a}\overset{n-a}{\overline{R}}_x;\quad V^{\omega}_{x+n} = R_{x+n}$$

Retrospektive:

$$res(n) = \left({}^{a}\overline{r}_x \overset{a}{\overline{R}}_x - {}^{a}\overset{n-a}{\overline{R}}_x\right)\frac{D_x}{D_{x+n}}$$

$$= \left({}^{a}\overline{R}_x - {}^{a}\overset{n-a}{\overline{R}}_x\right)\frac{D_x}{D_{x+n}}$$

$$= {}^{n}\overline{R}_x \frac{D_x}{D_{x+n}} = R_{x+n}$$

Prospektive:

$$res(n) = R_{x+n}$$

Altersrenten.

$$V_x = {}^{(a-x)}\overline{R}_x;\quad \hat{R}_x = \overset{a-x}{\overline{R}}_x;\quad v_x = {}^{(a-x)}\overline{r}_x = \frac{{}^{(a-x)}\overline{R}_x}{\overset{a-x}{\overline{R}}_x}$$

1) $(x+n) < a,\ n < (a-x)$

$$\hat{R}_x^{x+n} = \overset{n}{\overline{R}}_x;\quad \hat{R}^{\omega}_{x+n} = \overset{a-x-n}{\overline{R}}_{x+n};\quad V_x^{x+n} = 0;$$

$$V^{\omega}_{x+n} = {}^{(a-x-n)}\overline{R}_{x+n}$$

Retrospektive:

$$res(n) = {}^{(a-x)}\overline{r}_x \cdot \overset{n}{\overline{R}}_x \frac{D_x}{D_{x+n}}$$

$$= \frac{{}^{(a-x)}\overline{r}_x}{{}^{n}e_x}$$

Prospektive:

$$res(n) = {}^{(a-x-n)}\overline{R}_{x+n} - {}^{(a-x)}\overline{r}_x \overset{a-x-n}{\overline{R}}_x$$

2) $(x+n) > a;\ n > (a-x)$

$$\hat{R}_x^{x+n} = \overset{a-x}{\overline{R}}_x;\quad \hat{R}^{\omega}_{x+n} = 0;\quad V_x^{x+n} = {}^{(a-x)}\overset{x+n-a}{\overline{R}}_x;$$

$$V^{\omega}_{x+n} = R_{x+n}$$

Retrospektive:

$$res(n) = \left({}^{(a-x)}\overline{r}_x \overset{a-x}{\overline{R}}_x - {}^{(a-x)}\overset{x+n-a}{\overline{R}}_x\right)\frac{D_x}{D_{x+n}}$$

$$= \left({}^{(a-x)}\overline{R}_x - {}^{(a-x)}\overset{x+n-a}{\overline{R}}_x\right)\frac{D_x}{D_{x+n}}$$

$$= {}^{n}\overline{R}_x \frac{D_x}{D_{x+n}} = R_{x+n}$$

Prospektive:

$$res(n) = R_{x+n}$$

Retrospektive | **Prospektive**

Prämien-Reserve.

Aufgeschobene temporäre Rente.

$$V_x = {}^{a}\overset{d}{\overline{R}}_x;\quad \hat{R}_x = \overset{a}{\overline{R}}_x;\quad v_x = {}^{a}\overset{d}{r} = \frac{{}^{a}\overset{d}{\overline{R}}_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x}$$

1) $n < a$

$$\hat{R}_x^{x+n} = \overset{n}{\overline{R}}_x;\quad \hat{R}^{\omega}_{x+n} = \overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n};\quad V_x^{x+n} = 0;\quad V^{\omega}_{x+n} = {}^{(a-n)}\overset{d}{\overline{R}}_{x+n}$$

Retrospektiv:

$$res(n) = {}^{a}\overset{d}{r}_x \overset{n}{\overline{R}}_x \frac{D_x}{D_{x+n}} = \frac{{}^{a}\overset{d}{r}_x}{{}^{n}e_x}$$

Prospektiv:

$$res(n) = {}^{(a-n)}\overset{d}{\overline{R}}_{x+n} - {}^{a}\overset{d}{r}_x \overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n}$$

2) $a < n < (a+d)$

$$\hat{R}_x^{x+n} = \overset{a}{\overline{R}}_x;\quad \hat{R}^{\omega}_{x+n} = 0;\quad V_x^{x+n} = {}^{a}\overset{n-a}{\overline{R}}_x;\quad V^{\omega}_{x+n} = \overset{a+d-n}{\overline{R}}_{x+n}$$

Retrospektiv:

$$res(n) = \left({}^{a}\overset{d}{r}_x \overset{a}{\overline{R}}_x - {}^{a}\overset{n-a}{\overline{R}}_x\right) \frac{D_x}{D_{x+n}}$$

$$= \left({}^{a}\overset{d}{\overline{R}}_x - {}^{a}\overset{n-a}{\overline{R}}_x\right) \frac{D_x}{D_{x+n}}$$

$$= {}^{n}\overset{a+d-n}{\overline{R}}_x \frac{D_x}{D_{x+n}} = \overset{a+d-n}{\overline{R}}_{x+n}$$

Prospektiv:

$$res(n) = \overset{a+d-n}{\overline{R}}_{x+n}$$

Einfache Ablebensversicherung mit lebenslänglicher Prämienzahlung.

$$V_x = P_x = 1 - \frac{r-1}{r} R_x;\quad v_x = p_x = \frac{1}{R_x} - \frac{r-1}{r};\quad \hat{R}_x = R_x;$$

$$\hat{R}_x^{x+n} = \overset{n}{\overline{R}}_x;\quad \hat{R}^{\omega}_{x+n} = R_{x+n};\quad V_x^{x+n} = \overset{n}{\overline{P}}_x$$

$$= 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} - \frac{r-1}{r}\overset{n}{\overline{R}}_x;\quad V^{\omega}_{x+n} = P_{x+n} = 1 - \frac{r-1}{r} R_{x+n}$$

Retrospektiv:

$$res(n) = \left(p_x \overset{n}{\overline{R}}_x - \overset{n}{\overline{P}}_x\right) \frac{D_x}{D_{x+n}}$$

Prospektiv:

$$res(n) = P_{x+n} - p_x R_{x+n}$$

$$res(n) = \left(1 - \frac{r-1}{r} R_{x+n}\right) - \left(\frac{R_{x+n}}{R_x} - \frac{r-1}{r} R_{x+n}\right) =$$

$$res(n) = 1 - \frac{R_{x+n}}{R_x}.$$

Retrospektive **Prospektive**

Prämien-Reserve.

Einfache Ablebensversicherung mit abgekürzter Prämienzahlung.

$$V_x = P_x = 1 - \frac{r-1}{r} R_x;\ v_x = \left(\overset{a}{\overline{p}}_x\right) = \frac{P_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x}$$

$$= \frac{1}{\overset{a}{\overline{R}}_x} - \frac{r-1}{r} \frac{R_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x};\ \hat{R}_x = \overset{a}{\overline{R}}_x$$

1) $n < a$.

$$\hat{R}_x^{x+n} = \overset{n}{\overline{R}}_x;\ \hat{R}^{\omega}_{x+n} = \overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n};\ V_x^{x+n} = \overset{n}{\overline{P}}_x$$

$$= 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} - \frac{r-1}{r} \overset{n}{\overline{R}}_x;\ V^{\omega}_{x+n} = P_{x+n} = 1 - \frac{r-1}{r} R_{x+n}$$

$$res(n) = \left[\left(\overset{a}{\overline{p}}_x\right)\overset{n}{\overline{R}}_x - \overset{n}{\overline{P}}_x\right] \frac{D_x}{D_{x+n}} \quad \Bigg| \quad res\,(n) = P_{x+n} - \left(\overset{a}{\overline{p}}_x\right)\overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n}$$

2) $n > a$.

$$\hat{R}_x^{x+n} = \overset{a}{\overline{R}}_x;\ \hat{R}^{\omega}_{x+n} = 0;\ V_x^{x+n} = \overset{n}{\overline{P}}_x = 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} - \frac{r-1}{r} \overset{n}{\overline{R}}_x;$$

$$V^{\omega}_{x+n} = P_{x+n} = 1 - \frac{r-1}{r} R_{x+n}$$

$$res\,(n) = \left(\left(\overset{a}{\overline{p}}_x\right)\overset{a}{\overline{R}}_x - \overset{n}{\overline{P}}_x\right) \frac{D_x}{D_{x+n}}$$

$$= \left(P_x - \overset{n}{\overline{P}}_x\right) \cdot \frac{D_x}{D_{x+n}} =$$

$${}^{n}\overline{P}_x \frac{D_x}{D_{x+n}} = P_{x+n} \quad \Bigg| \quad res\,(n) = P_{x+n}.$$

Ablebensversicherung mit Karenz und kurzer Prämienzahlung.

$$V_x = {}^{a}\overline{P}_x = \frac{D_{x+a}}{D_x} - \frac{r-1}{r} {}^{a}\overline{R}_x;\ \hat{R}_x = \overset{a}{\overline{R}}_x;\ v_x = {}^{a}\overset{a}{\overline{p}}_x = \frac{{}^{a}\overline{P}_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x}.$$

Retrospektive | **Prospektive**

Prämien-Reserve.

1) $n < a$.

$$\hat{R}_x^{x+n} = \overset{n}{\overline{R}}_x;\ \hat{R}^{\omega}_{x+n} = \overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n};\ V_x^{x+n} = 0;\ V^{\omega}_{x+n} = {}^{(a-n)}\overline{P}_{x+n}$$

$$res(n) = {}^{a}\overset{a}{p}_x\, \overset{n}{\overline{R}}_x \cdot \frac{D_x}{D_{x+n}} = \frac{{}^{a}\overset{a}{p}_x}{{}^{a}e_x} \quad\Big|\quad res(n) = {}^{(a-n)}\overline{P}_{x+n} - {}^{a}\overset{a}{p}_x\, \overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n}$$

2) $n > a$.

$$\hat{R}_x^{x+n} = \overset{a}{\overline{R}}_x;\ \hat{R}^{\omega}_{x+n} = 0;\ V_x^{x+n} = {}^{a}\overset{n-a}{\overline{P}}_x;\ V^{\omega}_{x+n} = P_{x+n}$$

$$res(n) = \left({}^{a}\overset{a}{p}_x\, \overset{a'}{\overline{R}}_x - {}^{a}\overset{n-a}{\overline{P}}_x\right)\frac{D_x}{D_{x+n}}$$

$$= \left({}^{a}\overline{P}_x - {}^{a}\overset{n-a}{\overline{P}}_x\right)\frac{D_x}{D_{x+n}} \quad\Big|\quad res(n) = P_{x+n}.$$

$$= {}^{n}\overline{P}_x \frac{D_x}{D_{x+n}} = P_{x+n}$$

Ablebensversicherung mit Karenz und lebenslänglicher Prämienzahlung.

$$V_x = {}^{a}\overline{P}_x;\ \hat{R}_x = R_x;\ v_x = {}^{a}\bar{p}_x = \frac{{}^{a}\overline{P}_x}{R_x}.$$

1) $n < a$.

$$\hat{R}_x^{x+n} = \overset{n}{\overline{R}}_x;\ \hat{R}^{\omega}_{x+n} = R_{x+n};\ V_x^{x+n} = 0;\ V^{\omega}_{x+n} = {}^{(a-n)}\overline{P}_{x+n}$$

$$res(n) = {}^{a}\bar{p}_x\, \overset{n}{\overline{R}}_x \cdot \frac{D_x}{D_{x+n}} = \frac{{}^{a}\bar{p}_x}{{}^{n}e_x}. \quad\Big|\quad res(n) = {}^{(a-n)}\overline{P}_{x+n} - {}^{a}\bar{p}_x R_{x+n}.$$

2) $n > a$.

$$\hat{R}_x^{x+n} = \overset{n}{\overline{R}}_x;\ \hat{R}^{\omega}_{x+n} = R_{x+n};\ V_x^{x+n} = {}^{a}\overset{n-a}{\overline{P}}_x;\ V^{\omega}_{x+n} = P_{x+n}$$

$$res(n) = \left({}^{a}\bar{p}_x\, \overset{n}{\overline{R}}_x - {}^{a}\overset{n-a}{\overline{P}}_x\right)\frac{D_x}{D_{x+n}}. \quad\Big|\quad res(n) = P_{x+n} - {}^{a}\bar{p}_x R_{x+n}.$$

Kurze Todesfallversicherung.

$$V_x = \overset{a}{\overline{P}}_x;\ v_x = \frac{\overset{a}{\overline{P}}_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x} = \overset{a}{\bar{p}}_x;\ \hat{R}_x = \overset{a}{\overline{R}}_x.$$

Retrospektive **Prospektive**

Prämien-Reserve.

$n < a.$

$$\hat{R}_x^{x+n} = \overset{n}{\overline{R}}_x;\quad \hat{R}^{\omega}_{x+n} = \overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n};\quad V_x^{x+n} = \overset{n}{\overline{P}}_x;\quad V^{\omega}_{x+n} = \overset{a-n}{\overline{P}}_{x+n}$$

$$res(n) = (\overset{a}{\bar{p}}_x \overset{n}{\overline{R}}_x - \overset{n}{\overline{P}}_x)\frac{D_x}{D_{x+n}}. \quad\Big|\quad res(n) = \overset{a-n}{\overline{P}}_{x+n} - \overset{a}{\bar{p}}_x \overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n}.$$

Gemischte Versicherung.

$n < a.$

$$V_x = {}^aG_x = \overset{a}{\overline{P}}_x + \frac{D_{x+a}}{D_x} = 1 - \frac{r-1}{r}\overset{a}{\overline{R}}_x;\quad \hat{R}_x = \overset{a}{\overline{R}}_x;\quad v_x = {}^a g_x$$

$$= \frac{1}{\overset{a}{\overline{R}}_x} - \frac{r-1}{r};\quad \hat{R}_x^{x+n} = \overset{n}{\overline{R}}_x;\quad \hat{R}^{\omega}_{x+n} = \overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n}$$

$$V_x^{x+n} = \overset{n}{\overline{P}}_x = 1 - \frac{D_{x+n}}{D_x} - \frac{r-1}{r}\overset{n}{\overline{R}}_x;\quad V^{\omega}_{x+n} = {}^{(a-n)}G_{x+n}$$

$$= 1 - \frac{r-1}{r}\overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n}$$

$$res(n) = \left({}^a g_x \overset{n}{\overline{R}}_x - \overset{n}{\overline{P}}_x\right)\frac{D_x}{D_{x+n}} \quad\Big|\quad \begin{aligned} res(n) &= \\ 1 - \frac{r-1}{r}\overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n} &- {}^a g_x \overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n} \\ &= 1 - \overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n}\left(\frac{r-1}{r} + {}^a g_x\right) \\ &= 1 - \frac{\overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n}}{\overset{a}{\overline{R}}_x} \end{aligned}$$

Gemischte Versicherung mit eventuell zweimaliger Kapitals- und kurzer Prämienzahlung.

$$V_x = {}^aG_x' = \frac{D_{x+a}}{D_x} + P_x;\quad \hat{R}_x = \overset{a}{\overline{R}}_x;\quad v_x = \frac{{}^aG_x'}{\overset{a}{\overline{R}}_x}$$

$$= \frac{D_{x+a}}{D_x \overset{a}{\overline{R}}_x} + \frac{P_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x} = {}^a g_x'$$

Retrospektive **Prospektive**
Prämien-Reserve.

1) $n < a$.

$$\hat{R}_x^{x+n} = \overset{n}{\overline{R}}_x;\ \hat{R}_{x+n}^{\omega} = \overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n};\ V_x^{x+n} = \overset{n}{\overline{P}}_x;$$

$$V_{x+n}^{\omega} = {}^{(a-n)}G'_{x+n} = \frac{D_{x+a}}{D_{x+n}} + P_{x+n}$$

$$res(n) = \left({}^a\overset{a}{g}_x{}' \overset{n}{\overline{R}}_x - \overset{n}{\overline{P}}_x\right)\frac{D_x}{D_{x+n}}$$

$$res(n) = \frac{D_{x+a}}{D_{x+n}} + P_{x+n} - {}^a\overset{a}{g}_x{}' \overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n}$$

2) $n > a$.

$$\hat{R}_x^{x+n} = \overset{a}{\overline{R}}_x;\ \hat{R}_{x+n}^{\omega} = 0;\ V_x^{x+n} = \frac{D_{x+a}}{D_x} + \overset{n}{\overline{P}}_x;\ V_{x+n}^{\omega} = P_{x+n}$$

$$res(n) = \left({}^a\overset{a}{g}_x{}' \overset{a}{\overline{R}}_x - \frac{D_{x+a}}{D_x} - \overset{n}{\overline{P}}_x\right)\frac{D_x}{D_{x+n}} = \left(\frac{D_{x+a}}{D_x} + P_x - \frac{D_{x+a}}{D_x} - \overset{n}{\overline{P}}_x\right)\frac{D_x}{D_{x+n}}$$
$$= \left(P_x - \overset{n}{\overline{P}}_x\right)\frac{D_x}{D_{x+n}} = {}^n\overline{P}_x \frac{D_x}{D_{x+n}} = P_{x+n}$$

$$res(n) = P_{x+n}.$$

Gemischte Versicherung mit eventuell zweimaliger Kapitals- und lebenslänglicher Prämienzahlung.

$$V_x = {}^aG_x{}' = \frac{D_{x+a}}{D_x} + P_x;\ \hat{R}_x = R_x;\ v_x = {}^ag_x{}' = \frac{{}^aG_x{}'}{R_x}$$
$$= \frac{D_{x+a}}{D_x R_x} + \frac{P_x}{R_x} = \frac{D_{x+a}}{D_x}\cdot\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_x} - \frac{r-1}{r}$$

1) $n < a$.

$$\hat{R}_x^{x+n} = \overset{n}{\overline{R}}_x;\ \hat{R}_{x+n}^{\omega} = R_{x+n};\ V_x^{x+n} = \overset{n}{\overline{P}}_x;$$

$$V_{x+n}^{\omega} = {}^{(a-n)}G'_{x+n} = \frac{D_{x+a}}{D_{x+n}} + P_{x+n}$$

Retrospektive **Prospektive**

Prämien-Reserve.

Retrospektive	Prospektive
$res(n) = \left({}^a g_x' \overset{n}{\overline{R}}_x - \overset{n}{\overline{P}}_x\right) \frac{D_x}{D_{x+n}}$	$res(n) = \frac{D_{x+a}}{D_{x+n}} + P_{x+n} - {}^a g_x' R_{x+n}$

2) $n > a$.

$$\hat{R}_x^{x+n} = \overset{n}{\overline{R}}_x;\ \hat{R}^{\omega}_{x+n} = R_{x+n};\ V_x^{x+n} = \frac{D_{x+a}}{D_x} + \overset{n}{\overline{P}}_x;$$

$$V^{\omega}_{x+n} = P_{x+n}$$

Retrospektive	Prospektive
$res(n) = \left({}^a g_x' \overset{n}{\overline{R}}_x - \frac{D_{x+a}}{D_x} - \overset{n}{\overline{P}}_x\right) \frac{D_x}{D_{x+n}}$	$res(n) = P_{x+n} - {}^a g_x' R_{x+n}.$

Aufgeschobene steigende Rente.

Eine x-jährige Person versichert sich gegen gleichbleibende, k Jahre hindurch zu Beginn eines jeden Jahres im Betrage ϱ_x zahlbare Prämien auf eine um k Jahre aufgeschobene, mit dem Betrage a beginnende, jährlich um δ steigende Rente; es wird die Prämien-Reserve dieser Versicherung nach n-jähriger Versicherungsdauer gesucht.

$$V_x = {}^{k\angle\delta}\overline{R}_x^{a} = (a-\delta)\, {}^{k}\overline{R}_x + \delta\, {}^{k\angle}\overline{R}_x;\ v_x = \varrho_x = \frac{{}^{k\angle\delta}\overline{R}_x^{a}}{\overset{k}{\overline{R}}_x}$$

$$= (a-\delta)\frac{{}^{k}\overline{R}_x}{\overset{k}{\overline{R}}_x} + \delta \frac{{}^{k\angle}\overline{R}_x}{\overset{k}{\overline{R}}_x};\ \hat{R}_x = \overset{k}{\overline{R}}_x.$$

1) $n < k$.

$$V_x^{x+n} = 0;\ V^{\omega}_{x+n} = {}^{(k-n)\angle\delta}\overline{R}^{a}_{x+n};\ \hat{R}_x^{x+n} = \overset{n}{\overline{R}}_x;\ \hat{R}^{\omega}_{x+n} = \overset{k-n}{\overline{R}}_{x+n}.$$

Retrospektive	Prospektive
$res(n) = \varrho_x \overset{n}{\overline{R}}_x \frac{D_x}{D_{x+n}}$	$res(n) = {}^{(k-n)\angle\delta}\overline{R}^{a}_{x+n} - \varrho_x \cdot \overset{k-n}{\overline{R}}_{x+n}.$

Retrospektive | **Prospektive**
Prämien-Reserve.

2) $n > k$.

$$V_x^{x+n} = {}^{(n-k)}_{\;k}\overset{\angle\delta}{R}{}^{a}_{x}; \quad V^{\omega}_{x+n} = \overset{\angle\delta}{R}{}^{[a+(n-k)\delta]}_{x+n}; \quad \hat{R}_x^{x+n} = \overset{k}{R}_x;$$

$$\hat{R}^{\omega}_{x+n} = 0.$$

$$res(n) =$$

$$\left(\varrho_x \overset{k}{R}_x - {}^{(n-k)}_{\;k}\overset{\angle\delta}{R}{}^{a}_{x}\right)\frac{D_x}{D_{x+n}}$$

$$= \left({}_{k}\overset{\angle\delta}{R}{}^{a}_{x} - {}^{(n-k)}_{\;k}\overset{\angle\delta}{R}{}^{a}_{x}\right)\frac{D_x}{D_{x+n}}$$

$$= {}_{n}\overset{\angle\delta}{R}{}^{[a+(n-k)\delta]}_{x}\,\frac{D_x}{D_{x+n}}$$

$$= \overset{\angle\delta}{R}{}^{[a+(n-k)\delta]}_{x+n}$$

$$res(n) = \overset{\angle\delta}{R}{}^{[a+(n-k)\delta]}_{x+n}.$$

Ablebensversicherung gegen fallende Prämien.

Die Prämie des 1. Jahres sei π_x, dieselbe vermindere sich jährlich um δ; es betragen daher die Prämien zu Beginn des 1., 2., 3., 4., ... k-ten ... Jahres:

π_x, $(\pi_x - \delta)$, $(\pi_x - 2\delta)$, $(\pi_x - 3\delta)$, ... $[\pi_x - (k-1)\delta]$ ...

Die Prämie bildet daher eine konstante Leibrente im jährlichen Betrage $(\pi_x + \delta)$, vermindert um die steigende Rente $\delta \overset{\angle}{R}_x$; wir erhalten die Prämie π_x aus der Gleichung:

$$(\pi_x + \delta) R_x - \delta \overset{\angle}{R}_x = P_x,$$

woraus:

$$\pi_x = \frac{P_x + \delta \overset{\angle}{R}_x - \delta R_x}{R_x} = \frac{P_x + \delta\, {}^{1}\overset{\angle}{R}_x}{R_x}.$$

Wir können jedoch diese Versicherung auch als eine gegen eine konstante jährliche Prämie π_x abgeschlossene Ablebensversicherung P_x und eine Versicherung auf eine um ein Jahr aufgeschobene, mit dem Betrage δ beginnende, jährlich um δ steigende Rente auffassen, indem der Versicherte wohl jährlich dieselbe Prämie π_x entrichtet, jedoch

Retrospektive **Prospektive**

Prämien-Reserve.

zu Beginn des 2., 3., 4., . . . k-ten . . . Jahres die Beträge δ, 2δ, 3δ,. . .$(k-1)\delta$ . . . zurückerhält. Um die Prämien-Reserve dieser Versicherung zu finden, haben wir:

$$V_x = P_x + \delta \overset{1\angle}{R_x};\ V_x^{x+n} = \overset{n}{\bar{P}}_x + \delta \overset{(n-1)}{\overset{1\angle}{R_x}};\ V_{x+n}^{\omega} = P_{x+n} + \delta \overset{\angle n}{R}_{x+n}$$

$$\hat{R}_x = R_x;\ \hat{R}_x^{x+n} = \overset{n}{\bar{R}}_x;\ R_{x+n}^{\omega} = R_{x+n};\ v_x = \pi_x = \frac{P_x + \delta \overset{1\angle}{R_x}}{R_x}$$

$res\,(n) =$	$res\,(n) =$
$\left(\pi_x \overset{n}{\bar{R}} - \overset{n}{\bar{P}}_x - \delta \overset{(n-1)}{\overset{1\angle}{R_x}}\right) \dfrac{D_x}{D_{x+n}}$	$P_{x+n} + \delta \overset{\angle n}{R}_{x+n} - \pi_x R_{x+n}$

Die folgende Tabelle zeigt die Berechnung der Prämien-Reserve der

zahlung nach der Formel:

x	$\log R_x$	$\log R_{x+10}$	$\log \dfrac{R_{x+10}}{R_x}$	$\log R_{x+20}$	$\log \dfrac{R_{x+20}}{R_x}$	$\log R_{x+30}$	$\log \dfrac{R_{x+30}}{R_x}$
1	2	3	4	5	6	7	8
45	1·196455	1·086072	0·889617-1	0·945783	0·749328-1	0·757818	0·561363-1
46	187198	075332	888134	929060	741862	735972	548774
47	177553	062435	884882	911896	734343	713273	535720
48	167524	049203	881679	894394	726870	689391	521867
49	157093	035656	878563	876474	719381	664315	507222
50	146293	021722	875429	858079	711786	637770	491477
51	135220	007470	872250	839215	703995	610604	475384
52	123863	0·992803	868940	819819	695956	582998	459135
53	112222	977658	865436	799742	687520	554310	442088
54	100293	961985	861692	779091	678798	522251	421958
55	086072	945783	859711	757818	671746	483512	397440
56	075332	929060	853728	735972	660640	433059	357727
57	062435	911896	849461	713273	650838	359052	296617
58	049203	894394	845191	689391	640188	238946	189743
59	035656	876474	840818	664315	628659	000000	964344-2
60	021722	858079	836357	637770	616048	.	.
61	007470	839215	831745	610604	603134	.	.
62	0·992803	819819	827016	582998	590195	.	.
63	977658	799742	822084	554310	576652	.	.
64	961985	779091	817106	522251	560266	.	.
65	945783	757818	812035	483512	537729	.	.
.	.	.	.	.	.		

§ 56. Prämien-Reserve für Versicherungen mit Rückgewähr der Prämien.

Bei Versicherungen mit Rückgewähr der Prämien ist zu beachten, daſs zur Bestimmung der Werte der bisherigen und der zukünftigen Leistungen V_x^{x+n} und V_{x+n}^{ω} der Anstalt auch die der Anstalt durch die Rückgewähr der Prämien erwachsenden Auslagen berücksichtigt werden müssen.

Wählen wir als Beispiel die aufgeschobene Rente. Erfolgt die Versicherung gegen die einmalige Prämie $^{a}\overline{R}_{\varrho|x}$, welche sich aus der Gleichung:

$$^{a}\overline{R}_{\varrho|x} = {}^{a}\overline{R}_{x} + {}^{a}\overline{R}_{\varrho|x} \cdot \overset{a}{\overline{P}}_{x}$$

als

$$^{a}\overline{R}_{\varrho|x} = \frac{^{a}\overline{R}_{x}}{1 - \overset{a}{\overline{P}}_{x}}$$

---

einfachen Ablebensversicherung mit lebenslänglicher jährlicher Prämien-
$res\,(n) = 1 - \frac{R_{x+n}}{R_x}$.

$\frac{R_{x+10}}{R_x}$	$\frac{R_{x+20}}{R_x}$	$\frac{R_{x+30}}{R_x}$	$res\,(10) = 1 - \frac{R_{x+10}}{R_x}$	$res\,(20) = 1 - \frac{R_{x+20}}{R_x}$	$res\,(30) = 1 - \frac{R_{x+30}}{R_x}$	x
9	10	11	12	13	14	15
0·775 563	0·561 471	0·364 219	0·224 437	0·438 529	0·635 781	45
772 918	551 902	353 813	227 082	448 098	646 187	46
767 153	542 429	343 337	232 847	457 571	656 663	47
761 516	533 175	332 558	238 484	466 825	667 442	48
756 072	524 060	321 530	243 928	475 940	678 470	49
750 635	514 975	310 082	249 365	485 025	689 918	50
745 160	505 819	298 802	254 840	494 181	701 198	51
739 503	496 542	287 830	260 497	503 458	712 170	52
733 560	486 990	276 750	266 440	513 010	723 250	53
727 263	477 307	264 215	272 737	522 693	735 785	54
723 953	469 619	249 712	276 047	530 381	750 288	55
714 048	457 762	227 891	285 952	542 238	772 109	56
707 068	447 546	197 978	292 932	552 454	802 022	57
700 150	436 705	154 790	299 850	563 295	845 210	58
693 135	425 264	092 118	306 865	574 736	907 882	59
686 052	413 093	.	313 948	586 907	.	60
678 355	400 990	.	321 645	599 010	.	61
671 453	389 220	.	328 547	610 780	.	62
663 871	377 270	.	336 129	622 730	.	63
656 306	363 301	.	343 694	636 699	.	64
648 687	344 928	.	351 313	655 072	.	65
.	.		.	.		.

ergiebt, so besteht für $n < a$ der Wert der von der Anstalt innerhalb n Jahren geleisteten Zahlungen blofs in der Rückerstattung der Prämien für die innerhalb n Jahren Gestorbenen und beträgt daher ${}^{a}\overline{R}_{\varrho|x}\,\overset{n}{\overline{P}}_x$ auf den Zeitpunkt des Versicherungsabschlusses diskontiert, auf den n Jahre späteren Zeitpunkt der Bestimmung der Prämien-Reserve aufgezinst, daher ${}^{a}\overline{R}_{\varrho|x}\,\overset{n}{\overline{P}}_x\,\frac{D_x}{D_{x+n}}$; der Wert der künftigen Zahlungen der Anstalt dagegen besteht aus dem künftigen Werte der Zahlungen für die Hauptversicherung ${}^{(a-n)}\overline{R}_{x+n}$ und dem künftigen Werte der Rückerstattung der Prämien für die vom Alter $(x+n)$ bis zum Alter $(x+a)$ Gestorbenen, d. i. ${}^{a}\overline{R}_{\varrho|x}\,\overset{a-n}{\overline{P}}_{x+n}$. Es ist daher

die retrospektive Prämien-Reserve:

$$res_n\left({}^{a}\overline{R}_{\varrho|x}\right) = \left({}^{a}\overline{R}_{\varrho|x} - {}^{a}\overline{R}_{\varrho|x}\overset{n}{\overline{P}}_x\right)\frac{D_x}{D_{x+n}}$$

$$= \left(1 - \overset{n}{\overline{P}}_x\right){}^{a}\overline{R}_{\varrho|x}\,\frac{D_x}{D_{x+n}} = \frac{{}^{a}\overline{R}_{\varrho|x}}{{}^{n}E_x}\left(1 - \overset{n}{\overline{P}}_x\right) \qquad 1)$$

und die prospektive Prämien-Reserve:

$$res_n\left({}^{a}\overline{R}_{\varrho|x}\right) = {}^{(a-n)}\overline{R}_{x+n} + {}^{a}\overline{R}_{\varrho|x}\,.\,\overset{a-n}{\overline{P}}_{x+n}. \qquad 2)$$

Soll die Brutto-Prämie $(\alpha\,{}^{a}\overline{R}'_{\varrho|x} + \beta_x)$ für alle vor Erreichung des Alters $(x+a)$ Verstorbenen rückerstattet werden, so ist der Wert der bisherigen Zahlungen des Versicherten nur die Netto-Prämie ${}^{a}\overline{R}'_{\varrho|x}$, da der Betrag, um welchen die Brutto-Prämie $(\alpha\,{}^{a}\overline{R}'_{\varrho|x} + \beta_x)$ die Netto-Prämie ${}^{a}\overline{R}'_{\varrho|x}$ übersteigt, blofs zur Deckung der Regie-Auslagen verwendet wird; dagegen gehen die Leistungen der Anstalt für die Rückerstattung der Prämien vom Alter x bis zum Alter $(x+n)$ in: $(\alpha\,{}^{a}\overline{R}'_{\varrho|x} + \beta_x)\,\overset{n}{\overline{P}}_x$, und vom Alter $(x+n)$ angefangen in: $(\alpha\,{}^{a}\overline{R}'_{\varrho|x} + \beta_x)\,\overset{a-n}{\overline{P}}_{x+n}$ über. — Wir erhalten daher als retrospektive Prämien-Reserve:

$$res\,(n) = \left[{}^{a}\overline{R}'_{\varrho|x} - (\alpha\,{}^{a}\overline{R}'_{\varrho|x} + \beta_x)\,\overset{n}{\overline{P}_x}\right]\frac{D_x}{D_{x+n}}$$

$$= \left({}^{a}\overline{R}'_{\varrho|x} - B_{\varrho|x}\,\overset{n}{\overline{P}_x}\right)\frac{D_x}{D_{x+n}} \qquad 3)$$

und als prospektive Prämien-Reserve:

$$res\,(n) = {}^{(a-n)}\overline{R}_{x+n} + (\alpha\,{}^{a}\overline{R}'_{\varrho|x} + \beta_x)\,\overset{a-n}{\overline{P}_{x+n}}$$

$$= {}^{(a-n)}\overline{R}_{x+n} + B_{\varrho|x}\,.\,\overset{a-n}{\overline{P}_{x+n}}. \qquad 4)$$

Bei Jahres-Netto-Prämien für die aufgeschobene Rente und Rückgewähr der Netto-Prämien erhalten wir aus der Gleichung:

$${}^{a-}r_{\varrho|x}\,\overset{a}{\overline{R}_x} = {}^{a}\overline{R}_x + {}^{a-}r_{\varrho|x}\,\overset{a\angle}{P_x}$$

die Netto-Prämie:

$${}^{a-}r_{\varrho|x} = \frac{{}^{a}\overline{R}_x}{\overset{a}{\overline{R}_x} - \overset{a\angle}{P_x}}$$

als Wert der bisherigen Zahlungen des Versicherten:

$${}^{a-}r_{\varrho|x}\,.\,\overset{n}{\overline{R}_x}\,.\,\frac{D_x}{D_{x+n}},$$

als Wert der bisherigen Zahlungen der Anstalt für die Hauptversicherung: 0,

als Wert der bisherigen Zahlungen der Anstalt für die Rückgewähr der Prämien:

$${}^{a-}r_{\varrho|x}\,\overset{n\angle}{P_x}\,\frac{D_x}{D_{x+n}},$$

mithin als retrospektive Prämien-Reserve:

$$res\,(n) = \left({}^{a-}r_{\varrho|x}\,\overset{n}{\overline{R}_x} - {}^{a-}r_{\varrho|x}\,\overset{n\angle}{P_x}\right)\frac{D_x}{D_{x+n}}$$

$$= \frac{{}^{a-}r_{\varrho|x}\,\overset{n}{\overline{R}_x}}{\frac{D_{x+n}}{D_x}}\left(1 - \frac{\overset{n\angle}{P_x}}{\overset{n}{\overline{R}_x}}\right) = \frac{{}^{a-}r_{\varrho|x}}{{}^{n}e_x}\left(1 - \frac{\overset{n\angle}{P_x}}{\overset{n}{\overline{R}_x}}\right) \qquad 5)$$

als Wert der künftigen Zahlungen der Anstalt

für die Hauptversicherung: ${}^{(a-n)}\overline{R}_{x+n}$

für die Rückgewähr der Prämien, da die $(n+1)$-, $(n+2)$-, $(n+3)$-, ... a-fache Jahres-Prämie rückerstattet werden mufs, wenn der Versicherte innerhalb eines Jahres nach Erreichung des Alters $(x+n)$, $(x+\overline{n+1})$, $(x+\overline{n+2})$ ... $(x+\overline{a-1})$ stirbt: ${}^{a-}r_{\varrho|x}\;{}^{(a-n)\angle(n+1)}P_{x+n}$, und als Wert der künftigen Zahlungen des Versicherten:

$$ {}^{a-}r_{\varrho|x}\;{}^{a-n}\overline{R}_{x+n}, $$

daher als prospektive Prämien-Reserve:

$$ res\,(n) = {}^{(a-n)}\overline{R}_{x+n} + {}^{a-}r_{\varrho|x}\;{}^{(a-n)\angle(n+1)}P_{x+n} - {}^{a-}r_{\varrho|x}\;{}^{a-n}\overline{R}_{x+n} $$

$$ = {}^{(a-n)}\overline{R}_{x+n} + {}^{a-}r_{\varrho|x}\left({}^{(a-n)\angle(n+1)}P_{x+n} - {}^{a-n}\overline{R}_{x+n}\right). \qquad 6) $$

Sollen die Brutto-Jahres-Prämien $b_{\varrho|x} = \alpha\,{}^{a-,}r_{\varrho|x} + \beta_x$ rückerstattet werden, so gehen die Formeln 5) und 6) über: für die retrospektive Prämien-Reserve:

$$ res\,(n) = \left[{}^{a-,}r'_{\varrho|x}\;{}^{n}\overline{R}_x - (\alpha\,{}^{a-,}r'_{\varrho|x} + \beta_x)\;{}^{n\angle}P_x\right]\frac{D_x}{D_{x+n}} $$

$$ = \left({}^{a-,}r'_{\varrho|x}\;{}^{n}\overline{R}_x - b_{\varrho|x}\;{}^{n\angle}P_x\right)\frac{D_x}{D_{x+n}} \qquad 7) $$

und für die prospektive Prämien-Reserve:

$$ res\,(n) = \left({}^{(a-n)}\overline{R}_{x+n} + (\alpha\,{}^{a-}r_{\varrho|x} + \beta_x)\;{}^{(a-n)\angle(n+1)}P_{x+n} - {}^{a-,}r'_{\varrho|x}\;{}^{a-n}\overline{R}_{x+n}\right) $$

$$ = {}^{(a-n)}\overline{R}_{x+n} + b_{\varrho|x}\;{}^{(a-n)\angle(n+1)}P_{x+n} - {}^{a-,}r'_{\varrho|x}\;{}^{a-n}\overline{R}_{x+n}. \qquad 8) $$

Auf ähnliche Weise läfst sich die Prämien-Reserve für alle anderen Versicherungen mit Rückgewähr der Prämien bestimmen.

§ 57. Berechnung der Prämien-Reserve aus der Differenz der Jahres-Netto-Prämien.

Ist bei der einfachen Ablebensversicherung mit lebenslänglicher jährlicher Prämienzahlung die Jahres-Netto-Prämie des x-jährigen p_x, des $(x+n)$-jährigen p_{x+n}, so hat der Versicherte dadurch, daſs er die Versicherung nicht erst im Alter $(x+n)$, sondern bereits im Alter x abgeschlossen hat, jährlich statt p_{x+n} bloſs p_x zu zahlen, er erspart daher alljährlich vom Alter $(x+n)$ angefangen bis an sein Lebensende den Betrag $(p_{x+n} - p_x)$, der Wert der gesamten Ersparnis auf das Alter $(x+n)$ des Versicherten diskontiert, beträgt daher $(p_{x+n} - p_x) R_{x+n}$.

Dieser Betrag muſs mit dem Überschusse der bisherigen Zahlungen des Versicherten über die bisherigen Leistungen der Anstalt, d. h. mit der im Alter $(x+n)$ des Versicherten vorhandenen Prämien-Reserve identisch sein, so zwar, daſs die Prämien-Reserve zur Deckung dieser Ersparnis eben hinreicht, ohne daſs ein Rest übrig bleibt, da $p_{x+n} R_{x+n}$ den Wert der künftigen Leistungen der Anstalt, $p_x R_{x+n}$ den Wert der künftigen Zahlungen des Versicherten, $p_{x+n} R_{x+n} - p_x R_{x+n} = (p_{x+n} - p_x) R_{x+n}$ daher die prospektive Prämien-Reserve darstellt.

Es ist daher die Prämien-Reserve nach n-jährigem Bestande der Versicherung auch:

$$res_n(p_x) = (p_{x+n} - p_x) R_{x+n}. \qquad 1)$$

Die Richtigkeit dieser Formel läſst sich auch direkt nachweisen.

$$p_x = \frac{P_x}{R_x} = \frac{1 - \frac{r-1}{r} R_x}{R_x} = \frac{1}{R_x} - \frac{r-1}{r}$$

mithin

$$p_{x+n} = \frac{1}{R_{x+n}} - \frac{r-1}{r}$$

daher

$$(p_{x+n} - p_x) R_{x+n} = \left(\frac{1}{R_{x+n}} - \frac{1}{R_x}\right) R_{x+n} = 1 - \frac{R_{x+n}}{R_x},$$

was mit der für die einfache Ablebensversicherung mit lebenslänglicher Prämienzahlung auf Seite 109 gefundenen prospektiven Prämien-Reserve übereinstimmt.

Als Wert der prospektiven Prämien-Reserve für Versicherungen mit gleichbleibender jährlicher Prämienzahlung haben wir auf Seite 106 gefunden:

$$res(n) = \overset{\omega}{V}_{x+n} - v_x \hat{\overset{\omega}{R}}_{x+n}.$$

Hieraus folgt auch:

$$res(n) = \left(\frac{\overset{\omega}{V}_{x+n}}{\hat{\overset{\omega}{R}}_{x+n}} - v_x \right) \hat{\overset{\omega}{R}}_{x+n}.$$

Da $\overset{\omega}{V}_{x+n}$ den Wert der vom Alter $(x+n)$ für die ganze weitere Versicherungsdauer von der Anstalt zu leistenden Zahlungen, $\hat{\overset{\omega}{R}}_{x+n}$ den Wert der vom Alter $(x+n)$ des Versicherten für die ganze weitere Dauer der Prämienzahlung von demselben zu zahlenden Rente im jährlichen Betrage 1 bezeichnet, ist $\dfrac{\overset{\omega}{V}_{x+n}}{\hat{\overset{\omega}{R}}_{x+n}}$ die auf die ganze weitere Dauer der Prämienzahlung entfallende Jahres-Prämie der im Alter $(x+n)$ abgeschlossenen Versicherung.

Setzen wir:

$$\frac{\overset{\omega}{V}_{x+n}}{\hat{\overset{\omega}{R}}_{x+n}} = \overset{\omega}{v}_{x+n},$$

so erhalten wir für die Prämien-Reserve die Formel:

$$res(n) = (\overset{\omega}{v}_{x+n} - v_x) \hat{\overset{\omega}{R}}_{x+n}. \qquad 2)$$

Für die aufgeschobene Leibrente ist beispielsweise für $n < a$

$$\overset{\omega}{V}_{x+n} = {}^{(a-n)}\overline{R}_{x+n}, \quad \hat{\overset{\omega}{R}}_{x+n} = \overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n},$$

mithin:

$$\overset{\omega}{v}_{x+n} = \frac{{}^{(a-n)}\overline{R}_{x+n}}{\overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n}} = {}^{(a-n)}\overline{r}_{x+n}$$

gleich der Jahres-Prämie eines $(x+n)$-jährigen für eine um $(a-n)$ Jahre aufgeschobene Leibrente, folglich:

$$res(n) = \left({}^{(a-n)}\bar{r}_{x+n} - {}^{a}\bar{r}_x\right) \overset{a-n}{\bar{R}}_{x+n}. \qquad 3)$$

Ebenso finden wir beispielsweise für die Ablebensversicherung mit Karenz und kurzer Prämienzahlung für $n < a$

$$V^{\omega}_{x+n} = {}^{(a-n)}\overline{P}_{x+n} \text{ und } \hat{R}^{\omega}_{x+n} = \overset{a-n}{\bar{R}}_{x+n},$$

folglich:

$$v^{\omega}_{x+n} = \frac{{}^{(a-n)}\overline{P}_{x+n}}{\overset{a-n}{\bar{R}}_{x+n}} = {}^{(a-n)}\overset{a-n}{\bar{p}}_{x+n},$$

woraus:

$$res(n) = \left({}^{(a-n)}\overset{a-n}{\bar{p}}_{x+n} - {}^{a}\overset{a}{\bar{p}}_x\right)\overset{a-n}{\bar{R}}_{x+n}. \qquad 4)$$

Für die gemischte Versicherung finden wir, wenn $n < a$

$$V^{\omega}_{x+n} = \frac{D_{x+a}}{D_{x+n}} + \overset{a-n}{\overline{P}}_{x+n} = {}^{(a-n)}G_{x+n} \text{ und } \hat{R}^{\omega}_{x+n} = \overset{a-n}{\bar{R}}_{x+n},$$

mithin

$$v^{\omega}_{x+n} = \frac{{}^{(a-n)}G_{x+n}}{\overset{a-n}{\bar{R}}_{x+n}} = {}^{(a-n)}g_{x+n},$$

folglich:

$$res(n) = \left({}^{(a-n)}g_{x+n} - {}^{a}g_x\right)\overset{a-n}{\bar{R}}_{x+n}. \qquad 5)$$

Eine besondere Vorsicht erfordert die Anwendung dieser Methode bei der Versicherung mit Rückgewähr der Prämien.

Ist ${}^{a}\bar{r}_{\varrho/x}$ die Jahres-Prämie der aufgeschobenen Rente bei Rückgewähr der Prämien, wo aus

$${}^{a}\bar{r}_{\varrho/x}\overset{a}{\bar{R}}_x = {}^{a}\bar{R}_x + {}^{a}\bar{r}_{\varrho/x}\overset{a\angle}{P}_x$$

$${}^{a}\bar{r}_{\varrho/x} = \frac{{}^{a}\bar{R}_x}{\overset{a}{\bar{R}}_x - \overset{a\angle}{P}_x} = \frac{{}^{a}\bar{r}_x}{1 - \frac{\overset{a\angle}{P}_x}{\overset{a}{\bar{R}}_x}}, \qquad 6)$$

so ist

$$V^{\omega}_{x+n} = {}^{(a-n)}\overline{R}_{x+n} + {}^{a}\bar{r}_{\varrho|x} \overset{(a-n)\angle(n+1)}{P}_{x+n}; \quad \hat{R}^{\omega}_{x+n} = \overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n},$$

also

$$v^{\omega}_{x+n} = \frac{V^{\omega}_{x+n}}{\hat{R}^{\omega}_{x+n}} = \frac{{}^{(a-n)}\overline{R}_{x+n} + {}^{a}\bar{r}_{\varrho|x} \overset{(a-n)\angle(n+1)}{P}_{x+n}}{\overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n}}$$

$$= {}^{(a-n)}r_{x+n} + {}^{a}\bar{r}_{\varrho|x} \frac{\overset{(a-n)\angle(n+1)}{P}_{x+n}}{\overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n}}$$

und

$$res(n) = (v^{\omega}_{x+n} - v_x) \overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n}, \qquad 7)$$

wo jedoch v^{ω}_{x+n} nicht gleich ist ${}^{(a-n)}\bar{r}_{\varrho|x+n}$, da analog mit Formel 6)

$${}^{(a-n)}\bar{r}_{\varrho|x+n} = \frac{{}^{(a-n)}\overline{R}_{x+n}}{\overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n} - \overset{(a-n)\angle}{P}_{x+n}} = \frac{{}^{(a-n)}\bar{r}_{x+n}}{1 - \dfrac{\overset{(a-n)\angle}{P}_{x+n}}{\overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n}}},$$

es wäre daher falsch, analog zu den Formeln 1) und 2)—5) die Prämien-Reserve gleich zu setzen

$$\left({}^{(a-n)}\bar{r}_{\varrho|x+n} - {}^{a}\bar{r}_{\varrho|x}\right) \overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n},$$

vielmehr mufs, falls wir von dieser Methode auch bei Versicherungen mit Rückgewähr der Prämien Gebrauch machen wollen, v^{ω}_{x+n} aus den Werten V^{ω}_{x+n} und $\hat{R}_{x+n}$ für jede Versicherungsart ermittelt werden.

Als Beispiel zur Berechnung der Prämien-Reserve aus der Differenz der Jahres-Netto-Prämien sei die Prämien-Reserve einer Ablebensversicherung mit lebenslänglicher Prämienzahlung für einen beim Abschlusse der Versicherung 50jährigen nach 10jähriger Versicherungsdauer zu berechnen.

Nach Formel 1) ist: $res_{10}(p_{50}) = (p_{60} - p_{50}) R_{60}$.

Wie im § 40 gefunden wurde, ist $p_{50} = 0{\cdot}042\,275\,3$

$$p_{60} = \frac{1}{R_{60}} - \frac{r-1}{r} = \frac{1}{10{\cdot}5129} - \frac{0{\cdot}03}{1{\cdot}03} = \frac{1}{10{\cdot}5129} - 0{\cdot}029\,126\,2$$

$$\log R_{60} = 1{\cdot}021\,722$$

$$\log \frac{1}{R_{60}} = 0{\cdot}978\,278 - 2$$

$$\frac{1}{R_{60}} = 0{\cdot}095\,121\,4$$

$$\frac{r-1}{r} = 0{\cdot}029\,126\,2$$

$$p_{60} = 0{\cdot}065\,995\,2$$

mithin

$$res_{10}(p_{50}) = (0{\cdot}065\,9952 - 0{\cdot}042\,275\,3)\,10{\cdot}5129$$
$$= 0{\cdot}023\,7199.10{\cdot}5129$$

$$\log (p_{60} - p_{50}) = 0{\cdot}375\,113 - 2$$

$$\log R_{60} = 1{\cdot}021\,722$$

$$\log res_{10}(p_{50}) = 0{\cdot}396\,835 - 1$$

$$res_{10}(p_{50}) = 0{\cdot}249\,365,$$

welches Resultat mit dem in der Tabelle zu § 55 gefundenen übereinstimmt.

---

§ 58. Freie Prämien.

Wir sind bisher bei Versicherungen mit jährlicher Prämienzahlung von gleichbleibenden jährlichen Prämien ausgegangen; es soll jetzt der Fall betrachtet werden, wenn die Jahres-Prämien untereinander verschieden sind.

Nehmen wir an, jemand gehe eine Versicherung ein und zahle im Alter x die Prämie c_x, im Alter $(x+1)$ die Prämie c_{x+1}, im Alter $(x+2)$ die Prämie $c_{x+2} \ldots$ u. s. w.

Ist V_x die Einmal-Prämie der im Alter x abgeschlossenen Versicherung, (dieselbe mag beliebig sein, als Erlebens-, Renten-, Ablebensversicherung etc.) so heifst dies, gegen einmaligen Erlag des Betrages V_x kann der Versicherte eine Versicherung auf den Betrag 1 erwerben, er erwirbt

daher gegen Erlag des Betrages 1 eine Versicherung auf den Betrag $\frac{1}{V_x}$ und gegen Erlag des Betrages c_x eine Versicherung auf den Betrag $\frac{c_x}{V_x}$.

Ist ebenso V_{x+1} die Einmal-Prämie derselben Versicherung für das Alter $(x+1)$, so erwirbt der Versicherte gegen Erlag des Betrages c_{x+1} eine Versicherung auf den Betrag $\frac{c_{x+1}}{V_{x+1}}$.

Betrachten wir auf gleiche Weise jede einzelne Prämie als Einmal-Prämie der betreffenden Versicherungsart, so ist die Höhe des versicherten Betrages:

$$S = \frac{c_x}{V_x} + \frac{c_{x+1}}{V_{x+1}} + \frac{c_{x+2}}{V_{x+2}} + \dots \qquad 1)$$

Wir nennen eine solche Versicherung eine Versicherung mit freier Prämie zum Unterschiede von den bisher behandelten Versicherungen mit fixer Prämie.

Die Prämien-Reserve einer Versicherung mit freier Prämie läfst sich am einfachsten nach der prospektiven Methode bestimmen. Da jede einzelne Prämie als Einmal-Prämie betrachtet wird, hat der Versicherte gar keine weiteren Zahlungen zu leisten. Die Prämien-Reserve einer Versicherung im Betrage 1 ist daher im Alter $(x+n)$ des Versicherten V_{x+n} und die einer Versicherung im Betrage

$$\left(\frac{c_x}{V_x} + \frac{c_{x+1}}{V_{x+1}} + \frac{c_{x+2}}{V_{x+2}} + \dots\right)$$

beträgt daher:

$$res\,(n) = \left(\frac{c_x}{V_x} + \frac{c_{x+1}}{V_{x+1}} + \frac{c_{x+2}}{V_{x+2}} + \dots\right) V_{x+n} \qquad 2)$$

---

§ 59. Zillmersche Netto-Prämie und Prämien-Reserve.

Zillmer geht von der Voraussetzung aus, die Jahres-Netto-Prämien irgend einer Versicherung seien erst vom 2. Jahre angefangen unter einander gleich, während die Jahres-Netto-Prämie des 1. Jahres um einen Betrag A geringer sei.

Ist V_x die Einmal-Prämie der Versicherung für das Alter x des Versicherten, $\hat{R}_x$ der Wert der Rente im jährlichen Betrage 1, in welcher die Zahlung der Jahres-Prämien stattzufinden hat, v_x die gleichbleibende, π_x die Zillmersche Jahres-Netto-Prämie, so ist

$$v_x \hat{R}_x = V_x \text{ und hieraus } v_x = \frac{V_x}{\hat{R}_x} \qquad 1)$$

ferner

$$(\pi_x - A) + \pi_x (\hat{R}_x - 1) = V_x$$

oder

$$\pi_x \hat{R}_x = V_x + A \qquad 2)$$

woraus

$$\pi_x = \frac{V_x + A}{\hat{R}_x} \qquad 3)$$

oder

$$\pi_x = v_x + \frac{A}{\hat{R}_x}. \qquad 4)$$

Zillmer nimmt die Prämie des 1. Jahres rechnungsmäſsig wohl um den Betrag A kleiner, also im Betrage $(\pi_x - A)$ an, hebt jedoch vom Versicherten trotzdem die volle Prämie π_x auch im 1. Jahre ein; der im 1. Jahre zu viel eingehobene Betrag A dient zur Deckung der einmaligen Regie-Auslagen der Anstalt.

Die Prämien-Reserve der Versicherung nach n Jahren, nach der prospektiven Methode berechnet, ist für die gleichbleibende Jahres-Prämie:

$$res_n (v_x) = \overset{\omega}{V}_{x+n} - v_x \overset{\omega}{\hat{R}}_{x+n} = \left(\frac{\overset{\omega}{V}_{x+n}}{\overset{\omega}{\hat{R}}_{x+n}} - v_x\right) \overset{\omega}{\hat{R}}_{x+n}$$

$$= (\overset{\omega}{v}_{x+n} - v_x) \overset{\omega}{\hat{R}}_{x+n} \qquad 5)$$

für die Zillmersche Jahres-Prämie dagegen:

$$res_n (\pi_x) = \overset{\omega}{V}_{x+n} - \pi_x \overset{\omega}{\hat{R}}_{x+n} = \left(\frac{\overset{\omega}{V}_{x+n}}{\overset{\omega}{\hat{R}}_{x+n}} - \pi_x\right) \overset{\omega}{\hat{R}}_{x+n}$$

$$= (\overset{\omega}{v}_{x+n} - \pi_x) \overset{\omega}{\hat{R}}_{x+n} \qquad 6)$$

und hieraus:

$$res_n(v_x) - res_n(\pi_x) = (\pi_x - v_x)\hat{R}^{\omega}_{x+n} \qquad 7)$$

und da aus 4)

$$\pi_x - v_x = \frac{A}{\hat{R}_x}$$

auch

$$res_n(v_x) - res_n(\pi_x) = \frac{A}{\hat{R}_x}\hat{R}^{\omega}_{x+n}. \qquad 8)$$

Da nun $\frac{A}{\hat{R}_x}\hat{R}^{\omega}_{x+n}$ unter allen Umständen positiv ist, folgt aus 8), dafs die Zillmersche Prämien-Reserve stets kleiner ist, als die Prämien-Reserve bei gleichbleibender jährlicher Prämienzahlung.

Der Betrag A kann nicht beliebig grofs angenommen werden, da darauf Rücksicht genommen werden mufs, dafs die Prämie $(\pi_x - A)$ des 1. Jahres mindestens hinreichen mufs, um die Zahlungen der Anstalt im 1. Jahre zu decken.

Jst V_x eine einfache oder kurze Todesfallversicherung, so ist der Wert der von der Anstalt im 1. Jahre zu leistenden Zahlungen $\frac{DT_x}{D_x}$.

Es mufs daher:

$$\pi_x - A \geqq \frac{DT_x}{D_x}$$

und

$$A \leqq \pi_x - \frac{DT_x}{D_x}. \qquad 9)$$

Für die einfache Ablebensversicherung mit lebenslänglicher Prämienzahlung ist:

$$\pi_x R_x = P_x + A, \text{ oder } \pi_x R_x - P_x = A$$

und mit Berücksichtigung von 9)

$$\pi_x R_x - P_x \leqq \pi_x - \frac{DT_x}{D_x}$$

und

$$\pi_x \leqq \frac{P_x - \frac{DT_x}{D_x}}{R_x - 1}$$

Nun ist

$$\frac{P_x - \frac{DT_x}{D_x}}{R_x - 1} = \frac{\frac{\Sigma D T_{x+1}}{D_x}}{\frac{\Sigma D_{x+1}}{D_x}} = \frac{P_{x+1}}{R_{x+1}} = p_{x+1}$$

folglich

$$\pi_x \leqq p_{x+1} \tag{10)}$$

d. h. die Zillmersche Prämie der einfachen Ablebensversicherung mit lebenslänglicher Prämienzahlung darf höchstens ebenso grofs sein, als die Prämie des nächst höheren Alters bei gleichbleibender Jahres-Prämie.

Zu demselben Resultate kommen wir bei der kurzen Todesfallversicherung.

Es ist hier

$$\overset{a}{\overline{\pi}}_x \overset{a}{\overline{R}}_x = \overset{a}{\overline{P}}_x + A \quad \text{oder} \quad \overset{a}{\overline{\pi}}_x \overset{a}{\overline{R}}_x - \overset{a}{\overline{P}}_x = A$$

und wegen 9)

$$\overset{a}{\overline{\pi}}_x \overset{a}{\overline{R}}_x - \overset{a}{\overline{P}}_x \leqq \pi_x - \frac{DT_x}{D_x}$$

folglich:

$$\overset{a}{\overline{\pi}} \leqq \frac{\overset{a}{\overline{P}}_x - \frac{DT_x}{D_x}}{\overset{a}{\overline{R}}_x - 1} = \frac{\Sigma D T_x - \Sigma D T_{x+a} - DT_x}{\Sigma D_x - \Sigma D_{x+a} - D_x}$$

$$= \frac{\Sigma D T_{x+1} - \Sigma D T_{x+a}}{\Sigma D_{x+1} - \Sigma D_{x+a}}$$

oder:

$$\overset{a}{\overline{\pi}}_x \leqq \frac{\overset{a-1}{\overline{P}}_{x+1}}{\overset{a-1}{\overline{R}}_{x+1}} \tag{11)}$$

mithin auch hier:

$$\overset{a}{\overline{\pi}}_x \leqq \overset{a-1}{\overline{p}}_{x+1}.$$

Ebenso finden wir bei der einfachen Ablebensversicherung mit kurzer Prämienzahlung:

$$\left(\overset{a}{\pi}_x\right)\overset{a}{\overline{R}}_x = P_x + A \text{ oder } \left(\overset{a}{\pi}_x\right)\overset{a}{\overline{R}}_x - P_x = A$$

und mit Berücksichtigung der Formel 9)

$$\left(\overset{a}{\pi}\right)\overset{a}{\overline{R}}_x - P_x \leqq \left(\overset{a}{\pi}_x\right) - \frac{DT_x}{D_x}$$

woraus:

$$\left(\overset{a}{\pi}_x\right) \leqq \frac{P_x - \frac{DT_x}{D_x}}{\overset{a}{\overline{R}}_x - 1}$$

und wegen:

$$\frac{P_x - \frac{DT_x}{D_x}}{\overset{a}{\overline{R}}_x - 1} = \frac{\Sigma DT_{x+1}}{\Sigma D_{x+1} - \Sigma D_{x+a}} = \frac{P_{x+1}}{\overset{a-1}{\overline{R}}_{x+1}} = \left(\overset{a-1}{p}_{x+1}\right)$$

$$\left(\overset{a}{\pi}\right) \leqq \left(\overset{a-1}{p}_{x+1}\right) \tag{12}$$

Bei der gemischten Versicherung finden wir ebenfalls, wenn wir hier die Zillmersche Prämie mit ${}^a\gamma_x$ bezeichnen,

$${}^a\gamma_x \overset{a}{\overline{R}}_x - {}^aG_x \leqq {}^a\gamma_x - \frac{DT_x}{D_x}$$

hieraus:

$${}^a\gamma_x \leqq \frac{{}^aG_x - \frac{DT_x}{D_x}}{\overset{a}{\overline{R}}_x - 1}$$

und da:

$$\frac{{}^aG_x - \frac{DT_x}{D_x}}{\overset{a}{\overline{R}}_x - 1} = \frac{\frac{D_{x+a}}{D_x} + \overset{a}{\overline{P}}_x - \frac{DT_x}{D_x}}{\overset{a}{\overline{R}}_x - 1}$$

$$= \frac{D_{x+a} + \Sigma DT_{x+1} - \Sigma DT_{x+a}}{\Sigma D_{x+1} - \Sigma D_{x+a}} = \frac{{}^{(a-1)}G_{x+1}}{\overset{a-1}{\overline{R}}_{x+1}} = {}^{(a-1)}g_{x+1}$$

auch hier:

$$^{a}\gamma_x \leqq {}^{(a-1)}g_{x+1} \qquad 13)$$

Anders verhält sich die Sache bei der Erlebensversicherung; bezeichnen wir die Zillmersche Prämie für dieselbe mit $^{a}\eta_x$, so ist die Prämie des 1. Jahres $(^{a}\eta_x - A)$; da jedoch die Anstalt bei der Erlebensversicherung im 1. Jahre keinerlei Zahlungen zu leisten hat, so läfst sich auf diese Weise eine Bedingung für A nicht feststellen.

Bestimmen wir jedoch die Prämien-Reserve dieser Versicherung nach 1 Jahre nach der prospektiven Methode, so finden wir:

$$res_1\,(^{a}\eta_x) = \frac{D_{x+a}}{D_{x+1}} - {}^{a}\eta_x\,\overset{a-1}{\overline{R}}_{x+1}.$$

Es mufs nun $^{a}\eta_x\,\overset{a-1}{\overline{R}}_{x+1}$ kleiner oder höchsteus so grofs sein als $\frac{D_{x+a}}{D_{x+1}}$, da sonst die Prämien-Reserve negativ wäre, was unzulässig ist, da eine negative Prämien-Reserve vom retrospektiven Standpunkte betrachtet, bedeutet, dafs der Wert der bisherigen Leistungen der Anstalt den Wert der bisherigen Zahlungen des Versicherten übersteigt, was stets zu vermeiden ist, da die Anstalt die über die Zahlungen der Versicherten geleisteten Zuschüsse bei etwaigem Austritte der Versicherten aus den Prämien der späteren Jahre nicht hereinbringen könnte und dadurch zu Schaden kommen würde.

Da nun:

$$^{a}\eta_x\,\overset{a-1}{\overline{R}}_{x+1} \leqq \frac{D_{x+a}}{D_{x+1}}$$

so folgt:

$$^{a}\eta_x \leqq \frac{\frac{D_{x+a}}{D_{x+1}}}{\overset{a-1}{\overline{R}}_{x+1}}$$

und da:

$$\frac{\frac{D_{x+a}}{D_{x+1}}}{\overset{a-1}{\overline{R}}_{x+1}} = \frac{^{(a-1)}E_{x+1}}{\overset{a-1}{\overline{R}}_{x+1}} = {}^{(a-1)}e_{x+1}$$

folgt weiters:

$$^{a}\eta_x \leqq {}^{(a-1)}e_{x+1}. \qquad 14)$$

Ähnlich finden wir bei der aufgeschobenen Rente, deren Zillmersche Prämie $^{a}\bar{\varrho}_x$ sei, aus:

$$res_1\,(^{a}\bar{\varrho}_x) = {}^{(a-1)}\overline{R}_{x+1} - {}^{a}\bar{\varrho}_x \, \overset{a-1}{\overline{R}}_{x+1}$$

$$^{a}\bar{\varrho}_x \leqq \frac{^{(a-1)}\overline{R}_{x+1}}{\overset{a-1}{\overline{R}}_{x+1}}$$

oder:

$$^{a}\bar{\varrho} \leqq {}^{(a-1)}\bar{r}_{x+1}. \qquad 15)$$

Da, wie wir aus den Formeln 10) bis 15) ersehen, die Zillmersche Netto-Prämie des a-jährigen kleiner sein mufs oder höchstens ebenso grofs sein darf, wie die Prämie des $(a+1)$-jährigen für dieselbe Versicherung, nennt man diese Methode der Prämienbestimmung auch die $(a+1)$-Methode.

---

§ 60. Gruppenrechnung der Prämien-Reserve.

Aus dem bereits erörterten Begriffe der Prämien-Reserve ergiebt sich, dafs in dem Vermögen der Versicherungsanstalt die Prämien-Reserve jeder einzelnen Versicherung vorhanden sein mufs, da die Prämien-Reserve samt den künftigen Zahlungen des Versicherten, die als Rechnungsgrundlage angenommene Sterblichkeit und Verzinsung vorausgesetzt, eben hinreicht, um die künftigen Leistungen der Anstalt für die betreffende Versicherung zu decken.

Bei der Aufstellung der Bilanz, die in gewissen Zeitabschnitten, zumeist am Schlusse eines jeden Jahres, erfolgt, wird daher auch das Vorhandensein der Prämien-Reserve aller in Kraft befindlichen Versicherungen der Anstalt nachgewiesen werden müssen.

Um nun die Prämien-Reserve nicht für jede einzelne Versicherung gesondert berechnen zu müssen, trachtet man die Berechnung durch die Gruppenrechnung zu vereinfachen.

Wir wollen dies vorerst bei der einfachen Ablebensversicherung mit lebenslänglicher Prämienzahlung zeigen.

Für diese Versicherung haben wir gefunden:

$$res_n(p_x) = P_{x+n} - p_x R_{x+n}.$$

Ist der Versicherte nicht, wie bisher vorausgesetzt, auf den Betrag 1, sondern auf ein Kapital C versichert, so ist die Prämien-Reserve:

$$C\,res_n(p_x) = C \cdot P_{x+n} - Cp_x \cdot R_{x+n}$$

wo Cp_x die Jahres-Prämie des Versicherten für ein versichertes Kapital C bedeutet.

Wenn wir nun alle zur Zeit des Bilanzabschlusses gleichalterigen, z. B. z Jahre alten Versicherten, welche auf die Kapitalien $C_1, C_2, C_3 \ldots$ versichert sein mögen und die Versicherung in verschiedenem Alter, etwa $x_1, x_2, x_3 \ldots$ abgeschlossen haben, zu einer Gruppe vereinigen, und die Summe der Prämien-Reserve aller zu dieser Gruppe gehörigen Versicherten mit $Res(z)$ bezeichnen, so erhalten wir:

$$Res(z) = (C_1 P_z - C_1 p_{x_1} R_z) + (C_2 P_z - C_2 p_{x_2} R_z) + (C_3 P_z - C_3 p_{x_3} R_z) + \ldots$$

oder:

$$Res(z) = (C_1 + C_2 + C_3 + \ldots) P_z - (C_1 p_{x_1} + C_2 p_{x_2} + C_3 p_{x_3} + \ldots) R_z \ldots$$

Bezeichnen wir noch das ganze versicherte Kapital:

$$C_1 + C_2 + C_3 + \ldots = \Sigma C$$

und die Summe der Jahres-Prämien sämtlicher Versicherten dieser Gruppe:

$$C_1 p_{x_1} + C_2 p_{x_2} + C_3 p_{x_3} + \ldots = \Sigma C p_x$$

so folgt:

$$Res(z) = P_z \cdot \Sigma C - R_z \Sigma C p_x. \qquad 1)$$

Man wird also die Versicherten nach dem Alter am Bilanztage gruppieren, die Summe des versicherten Kapitals jeder einzelnen Gruppe mit der Einmal-Prämie des betreffenden Alters multiplizieren und hievon das Produkt aus der Leibrente des betreffenden Alters mit der Summe sämtlicher Jahres-Prämien subtrahieren.

Man kann hiebei die etwa vorhandenen Versicherungen mit einmaliger Prämienzahlung mit einbeziehen, indem die Jahres-Prämie für diese Versicherungen $= 0$ gesetzt wird.

Eine zweite Art der Gruppenrechnung für die einfache Ablebensversicherung mit lebenslänglicher Prämienzahlung ergiebt sich aus der Formel:

$$res(n) = 1 - \frac{R_{x+n}}{R_x}$$

und für ein versichertes Kapital C

$$C\,res(n) = C - \frac{C}{R_x} \cdot R_{x+n}$$

und für die ganze Gruppe der am Bilanztage z Jahre alten Versicherten:

$$Res(z) = \Sigma C - R_z\,\Sigma\left(\frac{C}{R_x}\right). \qquad 2)$$

$\frac{C}{R_x}$ kann beim Abschlusse der einzelnen Versicherung in den Reserve-Büchern eingetragen und braucht daher am Jahresabschlusse blofs summiert zu werden.

Eine 3. Art der Gruppenrechnung erhalten wir aus der Formel:

$$res(n) = (p_{x+n} - p_x)\,R_{x+n}$$

und für ein versichertes Kapital C mit Berücksichtigung, dafs: $x + n = z$

$$C\,res(n) = (C\,p_z - C\,p_x)\,R_z.$$

Wir erhalten daher für die ganze Gruppe:

$$Res(z) = (p_z\,\Sigma C - \Sigma C p_x)\,R_z \qquad 3)$$

wo ΣC und $\Sigma C p_x$ dieselbe Bedeutung haben, wie in Formel 1).

Nach Formel 3) wird man daher die Summe des versicherten Kapitals jeder Altersgruppe mit der Jahres-Prämie für das versicherte Kapital 1 dieses Alters multiplizieren, hievon die Summe der Jahres-Prämien dieser Gruppe subtrahieren und die Differenz mit dem Rentenwerte dieses Alters multiplizieren.

Für die einfache Ablebensversicherung mit kurzer Prämienzahlung gestaltet sich die Gruppenrechnung einfach, falls die Prämienzahlung bereits aufgehört hat. Ist $n > a$,

so ist $res_n\left(\left(\overset{a}{p_x}\right)\right) = P_{x+n}$ und für $x + n = z$

$$Res(z) = P_z\,\Sigma C. \qquad 4)$$

Schwieriger gestaltet sich hier die Gruppenrechnung, falls $n < a$, d. h. so lange die Jahres-Prämien noch gezahlt werden. Nach der prospektiven Methode ist alsdann:

$$res_n\left(\overset{a}{(\overline{p}_x)}\right) = P_{x+n} - \left(\overset{a}{\overline{p}_x}\right)\overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n}.$$

Setzen wir wieder das Alter am Bilanztage: $x + n = z$, hieraus $n = z - x$ und $a - n = x + a - z$, mithin:

$$res_n\left(\overset{a}{(\overline{p}_x)}\right) = P_z - \overset{a}{(\overline{p}_x)}\,\overset{x+a-z}{\overline{R_z}}$$

und da

$$\overset{x+a-z}{\overline{R_z}} = R_z - {}^{(x+a-z)}\overline{R}_z = R_z - \frac{\Sigma D_{x+a}}{D_z}$$

$$res_n\left(\overset{a}{(\overline{p}_x)}\right) = P_z - \overset{a}{(\overline{p}_x)}\,R_z + \overset{a}{(\overline{p}_x)}\,\Sigma D_{x+a} \cdot \frac{1}{D_z}$$

und für ein versichertes Kapitel C:

$$C\,res_n\left(\overset{a}{(\overline{p}_x)}\right) = C \,.\, P_z - C\overset{a}{(\overline{p}_x)}\,R_z + C\overset{a}{(\overline{p}_x)}\,\Sigma D_{x+a}\frac{1}{D_z}$$

und für die ganze Gruppe der am Bilanztage z-jährigen:

$$Res\,(z) = P_z \Sigma C - R_z \Sigma C\overset{a}{(\overline{p}_x)} + \frac{1}{D_z}\Sigma\left[C\overset{a}{(\overline{p}_x)}\,\Sigma D_{x+a}\right] \quad 5)$$

ΣC bedeutet auch hier die Summe des versicherten Kapitals, $\Sigma C\overset{a}{(\overline{p}_x)}$ die Summe der Jahres-Prämien; wird beim Abschlusse der Versicherung in einer Rubrik der Reservebücher das Produkt der Jahres-Prämie $C\overset{a}{(\overline{p}_x)}$ mit der Summe der diskontierten Zahlen der Lebenden desjenigen Alters, mit welchem die Prämienzahlung aufhört, ΣD_{x+a}, eingetragen, so giebt die Summe dieser Rubrik $\Sigma\left[C\overset{a}{(\overline{p}_x)}\,\Sigma D_{x+a}\right]$.

Ähnlich finden wir bei der aufgeschobenen Rente, so lange die Prämienzahlung dauert, d. h. wenn $n < a$:

$$res_n\left({}^{a}\overline{r}_x\right) = {}^{(a-n)}\overline{R}_{x+n} - {}^{a}\overline{r}_x\,\overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n}$$

oder

$$res_n({}^{a}\bar{r}_x) = {}^{(x+a-z)}\overline{R}_z - {}^{a}\bar{r}_x \overset{x+a-z}{\overline{R_z}} = {}^{(x+a-z)}\overline{R}_z$$

$$- {}^{a}\bar{r}_x (R_z - {}^{(x+a-z)}\overline{R}_z) = (1 + {}^{a}\bar{r}_x)^{(x+a-z)}\overline{R}_z - {}^{a}\bar{r}_x R_z$$

$$= (1 + {}^{a}\bar{r}_x) \frac{\Sigma D_{x+a}}{D_z} - {}^{a}\bar{r}_x R_z$$

und

$$C res_n({}^{a}\bar{r}_x) = \frac{1}{D_z} C \Sigma D_{x+a} + \frac{1}{D_z} \cdot C\, {}^{a}\bar{r}_x \Sigma D_{x+a} - C\, {}^{a}\bar{r}_x \cdot R_z$$

und für die ganze Gruppe im Alter z:

$$Res(z) = \frac{1}{D_z} \Sigma(C \Sigma D_{x+a}) + \frac{1}{D_z} \Sigma(C\, {}^{a}\bar{r}_x \Sigma D_{x+a})$$

$$- R_z \Sigma(C\, {}^{a}\bar{r}_x) \qquad 6)$$

Ebenso finden wir für die Erlebensversicherung:

$$res_n({}^{a}e_x) = \frac{D_{x+a}}{D_{x+n}} - {}^{a}e_x \overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n} = \frac{D_{x+a}}{D_z} - {}^{a}e_x \overset{x+a-z}{\overline{R_z}}$$

$$= \frac{D_{x+a}}{D_z} - {}^{a}e_x \left(R_z - \frac{\Sigma D_{x+a}}{D_z}\right)$$

und hieraus:

$$Res(z) = \frac{1}{D_z} \Sigma C D_{x+a} - R_z \Sigma C\, {}^{a}e_x + \frac{1}{D_z} \Sigma(C\, {}^{a}e_x \Sigma D_{x+a}). \qquad 7)$$

Für die gemischte Versicherung finden wir:

$$res_n({}^{a}g_x) = {}^{(a-n)}G_{x+n} - {}^{a}g_x \overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n} = 1 - \frac{r-1}{r} \overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n} - {}^{a}g_x \overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n}$$

$$= 1 - \overset{a-n}{\overline{R}}_{x+n} \left(\frac{r-1}{r} + {}^{a}g_x\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{r-1}{r} + {}^{a}g_x\right) (R_{x+n} - {}^{(a-n)}\overline{R}_{x+n})$$

$$res_n({}^{a}g_x) = 1 - \left(\frac{r-1}{r} + {}^{a}g_x\right) \left(R_{x+n} - \frac{\Sigma D_{x+a}}{D_{x+n}}\right)$$

$$= 1 - \left(\frac{r-1}{r} + {}^{a}g_x\right) \left(R_z - \frac{\Sigma D_{x+a}}{D_z}\right)$$

$$= 1 - \frac{r-1}{r} R_z - {}^{a}g_x R_z + \left(\frac{r-1}{r} + {}^{a}g_x\right) \frac{\Sigma D_{x+a}}{D_z}$$

Da nun:

$$1-\frac{r-1}{r}R_z=P_z \text{ und } {}^a g_x=\frac{1-\frac{r-1}{r}\overset{a}{\overline{R}}_x}{\overset{a}{\overline{R}}_x}=\frac{1}{\overset{a}{\overline{R}}_x}-\frac{r-1}{r}$$

ist weiters:

$$res_n\left({}^a g_x\right)=P_z-{}^a g_x R_z+\frac{1}{\overset{a}{\overline{R}}_x}\,\frac{\Sigma D_{x+a}}{D_z}$$

und hieraus:

$$Res\,(z)=P_z\Sigma C-R_z\Sigma C\,{}^a g_x+\frac{1}{D_z}\Sigma\left(\frac{C\Sigma D_{x+a}}{\overset{a}{\overline{R}}_x}\right) \qquad 8)$$

$\frac{C\Sigma D_{x+a}}{\overset{a}{\overline{R}}_x}$ ist für jede einzelne Versicherung konstant, und kann daher gleich beim Abschlusse der Versicherung berechnet und in eine hiefür bestimmte Rubrik der Reservebücher eingetragen werden.

Die bisher behandelte Methode bietet den Vorteil, daſs alle am Bilanztage gleichalterigen Versicherten einer Versicherungsart in e i n e Gruppe zusammengefaſst werden können, doch ist diese Methode für die Prämien-Reserve steigender Renten und für Versicherungen mit Prämienrückgewähr nicht anwendbar.

Bei solchen Versicherungen müssen kleinere Gruppen gebildet werden, so daſs für die Versicherten einer Gruppe sowohl das Beitrittsalter x, als auch die Versicherungsdauer n dieselbe ist.

Bei Anwendung der retrospektiven Methode haben wir z. B. für die aufgeschobene Rente mit Rückgewähr der Netto-Prämien vor Beginn des Rentenbezuges, d. h. wenn $a<n$:

$$res_n\left({}^a\overline{r}_{\varrho|x}\right)=\left({}^a\overline{r}_{\varrho|x}\,\overset{n}{\overline{R}}_x-{}^a\overline{r}_{\varrho|x}\,\overset{n\angle}{P}_x\right)\frac{D_x}{D_{x+n}}={}^a\overline{r}_{\varrho|x}\left(\overset{n}{\overline{R}}_x-\overset{n\angle}{P}_x\right)\frac{D_x}{D_{x+n}}$$

mithin die Gesamt-Reserve für die ganze Gruppe:

$$Res_n=\frac{\overset{n}{\overline{R}}_x-\overset{n\angle}{P}_x}{{}^nE_x}\,\Sigma C\,{}^a\overline{r}_{\varrho|x} \qquad 9)$$

wo $\Sigma C^{a}\overline{r}_{\varrho|x}$ die Summe der Jahres-Prämien bezeichnet und $\frac{\overset{n}{\overline{R}}_x - \overset{n\angle}{P}_x}{{}^{n}E_x}$ für eine Gruppe mit demselben Beitrittsalter und derselben Versicherungsdauer konstant ist.

Ebenso ist beispielsweise für die gemischte Versicherung die retrospektive Prämien-Reserve:

$$res_n({}^{a}g_x) = ({}^{a}g_x \overset{n}{\overline{R}}_x - \overset{n}{\overline{P}}_x) \frac{D_x}{D_{x+n}},$$

mithin:

$$Res_n = \frac{\overset{n}{\overline{R}}_x}{{}^{n}E_x} \Sigma C^{a}g_x - \frac{\overset{n}{\overline{P}}_x}{{}^{n}E_x} \Sigma C. \qquad 10)$$

Hier ist $\Sigma C.{}^{a}g_x$ die Summe der Jahres-Prämien, ΣC die Summe der versicherten Kapitalien, $\frac{\overset{n}{\overline{R}}_x}{{}^{n}E_x}$ und $\frac{\overset{n}{\overline{P}}_x}{{}^{n}E_x}$ sind konstant für jede Gruppe mit demselben Beitrittsalter und derselben Versicherungsdauer.

Dritter Abschnitt.

Versicherung verbundener Leben.

Neuntes Kapitel.

§ 61. Wahrscheinlichkeit, dafs von einem verbundenen Paare nach einer bestimmten Zeit beide Teile, ein Teil, keiner von beiden am Leben ist.

Die bisher behandelten Versicherungsarten sind sämtlich vom Leben oder Sterben einer einzigen Person abhängig; wir wollen nun zu denjenigen Versicherungsarten übergehen, die vom Leben oder Sterben zweier oder auch mehrerer Personen abhängig sind.

Nehmen wir zwei durch irgend welche Interessen mit einander verbundene Personen an, es können dies zwei Ehegatten, oder Vater und Kind, oder auch zwei Geschwister desselben oder verschiedenen Geschlechtes, zwei Geschäftskompagnons etc. sein; wir nennen diese zwei Personen ein verbundenes Paar, werden uns jedoch häufig der Bezeichnung Mann und Frau bedienen, anstatt die einzelnen Personen des verbundenen Paares näher zu bezeichnen. Es sei x das Alter des Mannes, y das Alter der Frau. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dafs nach einem Jahre beide noch am Leben sind?

Die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Eintreffens zweier oder mehrerer von einander unabhängiger Ereignisse ist nach der Wahrscheinlichkeitslehre gleich dem Produkte

der Wahrscheinlichkeiten des Eintreffens der einzelnen Ereignisse.

Die Wahrscheinlichkeit, dafs nach einem Jahre der Mann noch am Leben ist, ist gleich $\frac{L_{x+1}}{L_x}$; die Wahrscheinlichkeit, dafs die Frau noch am Leben ist, $\frac{L_{y+1}}{L_y}$; es ist daher

1) die Wahrscheinlichkeit, dafs nach einem Jahre Mann und Frau noch am Leben sind: $\frac{L_{x+1}\,L_{y+1}}{L_x\,L_y}$.

Da die Wahrscheinlichkeit, dafs der Mann nach einem Jahre nicht mehr am Leben ist, gleich ist: $1-\frac{L_{x+1}}{L_x}$, und ebenso die Wahrscheinlichkeit, dafs die Frau nach einem Jahre nicht mehr am Leben ist: $1-\frac{L_{y+1}}{L_y}$, folgt weiters als Wahrscheinlichkeit, dafs nach einem Jahre

2) der Mann noch lebt, die Frau dagegen bereits gestorben ist:

$$\frac{L_{x+1}}{L_x}\left(1-\frac{L_{y+1}}{L_y}\right)=\frac{L_{x+1}}{L_x}\,\frac{L_y-L_{y+1}}{L_y}$$

3) der Mann bereits gestorben ist und die Frau noch lebt:

$$\left(1-\frac{L_{x+1}}{L_x}\right)\frac{L_{y+1}}{L_y}=\frac{L_x-L_{x+1}}{L_x}\,\frac{L_{y+1}}{L_y}$$

4) Mann und Frau bereits gestorben sind:

$$\left(1-\frac{L_{x+1}}{L_x}\right)\left(1-\frac{L_{y+1}}{L_y}\right)=\frac{L_x-L_{x+1}}{L_x}\cdot\frac{L_y-L_{y+1}}{L_y}.$$

Ebenso finden wir die Wahrscheinlichkeiten, dafs nach n Jahren

1) sowohl der Mann, als auch die Frau noch leben:

$$\frac{L_{x+n}}{L_x}\cdot\frac{L_{y+n}}{L_y}$$

2) der Mann noch lebt und die Frau bereits gestorben ist:

$$\frac{L_{x+n}}{L_x}\left(1-\frac{L_{y+n}}{L_y}\right)=\frac{L_{x+n}}{L_x}\,\frac{L_y-L_{y+n}}{L_y}$$

3) die Frau noch lebt und der Mann bereits gestorben ist:

$$\left(1-\frac{L_{x+n}}{L_x}\right)\frac{L_{y+n}}{L_y}=\frac{L_x-L_{x+n}}{L_x}\,\frac{L_{y+n}}{L_y}$$

4) sowohl der Mann, als auch die Frau bereits gestorben sind:

$$\left(1-\frac{L_{x+n}}{L_x}\right)\left(1-\frac{L_{y+n}}{L_y}\right)=\frac{L_x-L_{x+n}}{L_x}\cdot\frac{L_y-L_{y+n}}{L_y}.$$

Es ist hiebei zu bemerken, dafs L_x und L_y nicht derselben Sterblichkeitstafel angehören müssen, was übrigens bei solchen Sterblichkeitstafeln, die nicht für beide Geschlechter Geltung haben, überhaupt nicht möglich wäre, wenn das verbundene Paar von Personen verschiedenen Geschlechtes gebildet wird.

Wir können die soeben abgeleiteten Wahrscheinlichkeiten 1)—4) auch noch auf folgendem Wege erhalten.

Denken wir uns $L_x\,L_y$ Paare, deren jedes aus einem x-jährigen Manne und einer y-jährigen Frau besteht; wir haben demnach $L_x\,L_y$ Männer und $L_x\,L_y$ Frauen. Da von L_x x-jährigen Männern nach n Jahren noch L_{x+n} Männer am Leben sind, werden von $L_x\,L_y$ x-jährigen Männern nach n Jahren noch $L_{x+n}\,L_y$ Männer am Leben sein.

Denken wir uns nun alle jene Paare aus den ursprünglich vorhandenen $L_x\,L_y$ Paaren zu einer besonderen Gruppe vereinigt, von denen die Männer nach n Jahren sämtlich noch am Leben sein werden, so mufs die Anzahl der Paare dieser Gruppe $L_{x+n}\,L_y$ sein; da von L_y Frauen nach n Jahren nur mehr L_{y+n} am Leben sind, so werden von den $L_{x+n}\,L_y$ Frauen dieser Gruppe nach n Jahren nur mehr $L_{x+n}\,L_{y+n}$ Frauen am Leben, mithin von der ursprünglich vorhandenen Anzahl $L_x\,L_y$ der Paare nach n Jahren nur mehr $L_{x+n}\,L_{y+n}$ Paare vorhanden sein, bei denen sowohl der Mann, als auch die Frau noch am Leben sind.

Es ist daher die Wahrscheinlichkeit dafür, dafs von einem verbundenen Paare, wo der Mann x, die Frau y Jahre alt ist, nach n Jahren noch beide am Teile am Leben sind

$$=\frac{L_{x+n}\,L_{y+n}}{L_x\,L_y} \qquad 1)$$

Da von den $L_x L_y$ verbundenen Paaren nach n Jahren nur mehr $L_{x+n} L_y$ Männer und von den Frauen dieser $L_{x+n} L_y$ Männer nur mehr $L_{x+n} L_{y+n}$ Frauen am Leben sind, sind

$$L_{x+n} L_y - L_{x+n} L_{y+n} = L_{x+n} (L_y - L_{y+n})$$

Männer Witwer geworden; es ist daher die Wahrscheinlichkeit, dafs ein verbundenes Paar im Alter x, beziehungsweise y, innerhalb n Jahren durch den Tod der Frau aufgelöst wird

$$= \frac{L_{x+n} (L_y - L_{y+n})}{L_x L_y} = \frac{L_{x+n}}{L_x} \left(1 - \frac{L_{y+n}}{L_y}\right). \qquad 2)$$

Von den ursprünglich vorhandenen $L_x L_y$ Männern sind nach n Jahren nur mehr $L_{x+n} L_y$ am Leben, mithin $L_x L_y - L_{x+n} L_y = L_y (L_x - L_{x+n})$ Männer gestorben; von den zu diesen Männern ursprünglich gehörigen $L_y (L_x - L_{x+n})$ Frauen leben, da von L_y Frauen nach n Jahren nur mehr L_{y+n} am Leben sind, noch $L_{y+n}(L_x - L_{x+n})$ Frauen, die also innerhalb n Jahren sämtlich Witwen geworden sind; es ist daher die Wahrscheinlichkeit, dafs ein verbundenes Paar im Alter x, beziehungsweise y, innerhalb n Jahren durch den Tod des Mannes aufgelöst wird

$$= \frac{L_{y+n}(L_x - L_{x+n})}{L_x L_y} = \left(1 - \frac{L_{x+n}}{L_x}\right) \frac{L_{y+n}}{L_y}. \qquad 3)$$

Da, wie soeben gezeigt wurde, unter $L_x L_y$ verbundenen Paaren $L_y (L_x - L_{x+n})$ Paare vorhanden sind, deren Männer innerhalb n Jahren vollständig aussterben und von den $L_y (L_x - L_{x+n})$ Frauen dieser Paare nach n Jahren nur mehr $L_{y+n}(L_x - L_{x+n})$ am Leben sind, müssen $L_y (L_x - L_{x+n}) - L_{y+n}(L_x - L_{x+n}) = (L_x - L_{x+n})(L_y - L_{y+n})$ Frauen gestorben sein; es werden also von $L_x L_y$ verbundenen Paaren $(L_x - L_{x+n})(L_y - L_{y+n})$ Paare durch den Tod beider Teile, des Mannes und der Frau, vollständig ausgestorben sein.

Es ist daher die Wahrscheinlichkeit, dafs ein verbundenes Paar im Alter x, beziehungsweise y, innerhalb n Jahren durch beiderseitigen Tod aufgelöst wird

$$= \frac{(L_x - L_{x+n})(L_y - L_{y+n})}{L_x L_y}$$

$$= \left(1 - \frac{L_{x+n}}{L_x}\right)\left(1 - \frac{L_{y+n}}{L_y}\right). \qquad 4)$$

Da einer der 4 Fälle 1), 2), 3), 4) unbedingt eintreten mufs, mufs die Summe der entwickelten 4 Wahrscheinlichkeiten = 1 sein; es ist auch thatsächlich:

$$\frac{L_{x+n} L_{y+n}}{L_x L_y} + \frac{L_{x+n}}{L_x}\left(1 - \frac{L_{y+n}}{L_y}\right) + \left(1 - \frac{L_{x+n}}{L_x}\right)\frac{L_{y+n}}{L_y}$$

$$+ \left(1 - \frac{L_{x+n}}{L_x}\right)\left(1 - \frac{L_{y+n}}{L_y}\right) = \frac{L_{x+n}}{L_x}\left(\frac{L_{y+n}}{L_y} + 1 - \frac{L_{y+n}}{L_y}\right)$$

$$+ \left(1 - \frac{L_{x+n}}{L_x}\right)\left(\frac{L_{y+n}}{L_y} + 1 - \frac{L_{y+n}}{L_y}\right)$$

$$= \frac{L_{x+n}}{L_x} + 1 - \frac{L_{x+n}}{L_x} = 1.$$

---

§ 62. Erlebensversicherung.

Ein verbundenes Paar, bestehend aus einem x-jährigen Manne und einer y-jährigen Frau, erlegt die Einmal-Prämie ${}^aE_{x,y}$, damit an dasselbe nach a Jahren, falls beide Teile noch am Leben sind, der Betrag 1 ausbezahlt werde.

Der Betrag 1 ist nach a Jahren mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{L_{x+a}}{L_x} \cdot \frac{L_{y+a}}{L_y}$ zahlbar; es ist daher der gegenwärtige Wert desselben:

$${}^aE_{x,y} = \frac{1}{r^a} \cdot \frac{L_{x+a}}{L_x} \cdot \frac{L_{y+a}}{L_y} \qquad 1)$$

oder auch:

$${}^aE_{x,y} = \frac{\frac{L_{x+a}}{r^{x+a}}}{\frac{L_x}{r^x}} \cdot \frac{L_{y+a}}{L_y}; \quad {}^aE_{x,y} = \frac{D_{x+a}}{D_x} \cdot \frac{L_{y+a}}{L_y} \qquad 2)$$

oder auch:

$$ {}^{a}E_{x,y} = \frac{L_{x+a}}{L_x} \frac{\frac{L_{y+a}}{r^{y+a}}}{\frac{L_y}{r^y}}; \quad {}^{a}E_{x,y} = \frac{L_{x+a}}{L_x} \frac{D_{y+a}}{D_y}. \qquad 3) $$

Führen wir noch die Bezeichnung ein:

$$ \frac{1}{r^k} \frac{L_{x+k} L_{y+k}}{L_x L_y} = \frac{D_{x+k} L_{y+k}}{D_x L_y} = \frac{L_{x+k} D_{y+k}}{L_x D_y} = \frac{D_{x+k,\, y+k}}{D_{x,y}}, $$

so erhalten wir ferner auch:

$$ {}^{a}E_{x,y} = \frac{D_{x+a,\, y+a}}{D_{x,y}}, \qquad 4) $$

wo jedoch zu beachten ist, dafs in dem Ausdrucke $D_{x+a,\, y+a}$ die Diskontierung entweder blofs nach $(x+a)$ oder blofs nach $(y+a)$, in keinem Falle jedoch nach beiden Altern vorzunehmen ist, und dafs die Diskontierung im Nenner in derselben Weise erfolgen mufs, wie im Zähler, also entweder bei beiden nach dem Alter des Mannes oder bei beiden nach dem Alter der Frau.

Wird die Erlebensversicherung in der Weise abgeschlossen, dafs der Betrag 1 nach a Jahren auszubezahlen ist, falls von dem verbundenen Paare überhaupt noch jemand am Leben ist, so können wir uns vorstellen, dafs sowohl der Mann, als auch die Frau jeder für sich eine Erlebensversicherung auf a Jahre eingeht; leben nun beide noch nach a Jahren, so würden sie zusammen den Betrag 2 erhalten; wenn wir nun annehmen, dafs das Paar nach a Jahren, falls beide Teile noch am Leben sind, den Betrag 1 an die Anstalt rückerstattet, so bleibt dem verbundenen Paare der Betrag 1, es ist mithin der Bedingung entsprochen, dafs der Betrag 1 von der Anstalt auszubezahlen ist, falls auch nur eine Person des verbundenen Paares am Leben ist. Wir erhalten daher als Einmal-Prämie dieser Versicherung:

$$ {}^{a}E_x + {}^{a}E_y - {}^{a}E_{x,y}. \qquad 5) $$

Unterziehen wir diese Formel einer Diskussion, so können wir folgende 4 Fälle unterscheiden:

1. Nach a Jahren lebt sowohl der Mann, als auch die Frau; jeder von ihnen erhält den Betrag 1, dagegen wird der Betrag 1 rückerstattet, mithin: $1 + 1 - 1 = 1$.

2. Es lebt nur der Mann; die Frau erhält nichts, es wird auch nichts rückerstattet, da nicht mehr beide Teile am Leben sind; folglich: $1 + 0 - 0 = 1$.

3. Es lebt nur die Frau; wir erhalten ähnlich: $0 + 1 - 0 = 1$.

4. Es lebt weder der Mann, noch die Frau, es ist daher nichts auszubezahlen; $0 + 0 - 0 = 0$.

---

§ 63. Verbindungsrenten.

Ein verbundenes Paar, der Mann x, die Frau y Jahre alt, erlegen eine Einmal-Prämie $R_{x,y}$, damit an dasselbe, so lange beide Teile noch am Leben sind, zu Beginn eines jeden Jahres der Betrag 1 ausbezahlt werde.

Die Wahrscheinlichkeit, dafs beide Teile nach n Jahren noch am Leben sind, ist $\frac{L_{x+n}}{L_x} \cdot \frac{L_{y+n}}{L_y}$; der gegenwärtige Wert des nach n Jahren zu zahlenden Betrages 1 ist daher: $\frac{1}{r^n} \frac{L_{x+n}}{L_x} \cdot \frac{L_{y+n}}{L_y}$.

Die erste Zahlung ist sofort fällig; für die späteren Zahlungen setzen wir für n der Reihe nach 1, 2, 3 u. s. w. bis zum höchsten Alter und summieren die so erhaltenen Werte der Zahlungen der einzelnen Jahre, wir erhalten alsdann:

$$R_{x,y} = 1 + \frac{1}{r} \cdot \frac{L_{x+1}}{L_x} \frac{L_{y+1}}{L_y} + \frac{1}{r^2} \frac{L_{x+2}}{L_x} \cdot \frac{L_{y+2}}{L_y} + \frac{1}{r^3} \frac{L_{x+3}}{L_x} \cdot \frac{L_{y+3}}{L_y} + \dots \qquad 1)$$

und wenn wir Zähler und Nenner eines jeden Gliedes durch Division mit r^x oder r^y diskontieren:

$$R_{x,y} = 1 + \frac{D_{x+1}\, L_{y+1}}{D_x\, L_y} + \frac{D_{x+2}\, L_{y+2}}{D_x\, L_y} + \frac{D_{x+3}\, L_{y+3}}{D_x\, L_y} + \dots \qquad 2)$$

oder

$$R_{x,y} = 1 + \frac{L_{x+1} D_{y+1}}{L_x D_y} + \frac{L_{x+2} D_{y+2}}{L_x D_y} + \frac{L_{x+3} D_{y+3}}{L_x D_y} + \dots \qquad 3)$$

und, da

$$\frac{D_{x+n} L_{y+n}}{D_x L_y} = \frac{L_{x+n} D_{y+n}}{L_x D_y} = \frac{D_{x+n, y+n}}{D_{x,y}},$$

auch:

$$R_{x,y} = 1 + \frac{D_{x+1, y+1}}{D_{x,y}} + \frac{D_{x+2, y+2}}{D_{x,y}} + \frac{D_{x+3, y+3}}{D_{x,y}} + \dots \qquad 4)$$

oder:

$$R_{x,y} = \frac{D_{x,y} + D_{x+1, y+1} + D_{x+2, y+2} + D_{x+3, y+3} + \dots}{D_{x,y}} \qquad 5)$$

Wir führen nun auch für die verbundenen Leben die Summe der diskontierten Zahlen ein:

$$\Sigma D_{x,y} = D_{x,y} + D_{x+1, y+1} + D_{x+2, y+2} + D_{x+3, y+3} + \dots \qquad 6)$$

und erhalten:

$$R_{x,y} = \frac{\Sigma D_{x,y}}{D_{x,y}} \qquad 7)$$

welche Formel mit der Rentenformel für einfache Leben $R_x = \frac{\Sigma D_x}{D_x}$ ganz analog gebildet ist.

Wenn in der Formel 1) die sofortige Zahlung wegfällt, erhalten wir die postnumerando zahlbare Verbindungsrente:

$$_{(1)}R_{x,y} = \frac{\Sigma D_{x+1, y+1}}{D_{x,y}}. \qquad 8)$$

Ebenso erhalten wir aus 1) die um a Jahre aufgeschobene Verbindungsrente, wenn die Zahlungen der ersten a Jahre:

$$1 + \frac{1}{r} \frac{L_{x+1}}{L_x} \cdot \frac{L_{y+1}}{L_y} + \frac{1}{r^2} \frac{L_{x+2}}{L_x} \cdot \frac{L_{y+2}}{L_y} + \dots + \frac{1}{r^{a-1}} \frac{L_{x+a-1}}{L_x} \cdot \frac{L_{y+a-1}}{L_y}$$

entfallen.

Wir erhalten sodann:

$$^{a}\overline{R}_{x,y} = \frac{\Sigma D_{x+a,y+a}}{D_{x,y}} \qquad 9)$$

Die temporäre oder kurze Verbindungsrente für a Jahre besteht blofs aus den Zahlungen der ersten a Jahre, mithin

$$\overset{a}{\overline{R}}_{x,y} = \frac{\Sigma D_{x,y} - \Sigma D_{x+a,y+a}}{D_{x,y}}. \qquad 10)$$

Aus 9) und 10) folgt weiters:

$$R_{x,y} = \overset{a}{\overline{R}}_{x,y} + {}^{a}\overline{R}_{x,y}. \qquad 11)$$

Die um a Jahre aufgeschobene, dann n Jahre hindurch zahlbare Verbindungsrente wird aus 1) gefunden, wenn blofs der Wert der Zahlungen der ersten $(a+n)$ Jahre berücksichtigt und hievon der Wert der Zahlungen der ersten a Jahre in Abzug gebracht wird; wir erhalten auf diese Weise:

$$^{a}\overset{n}{\overline{R}}_{x,y} = \frac{\Sigma D_{x+a,y+a} - \Sigma D_{x+a+n,y+a+n}}{D_{x,y}}. \qquad 12)$$

Die lebenslänglich steigende Verbindungsrente finden wir ähnlich, wie bei einfachem Leben:

$$\overset{\angle}{R}_{x,y} = 1 + 2\frac{L_{x+1}}{L_x}\cdot\frac{L_{y+1}}{L_y}\cdot\frac{1}{r} + 3\frac{L_{x+2}}{L_x}\frac{L_{y+2}}{L_y}\frac{1}{r^2}$$
$$+ 4\frac{L_{x+3}}{L_x}\cdot\frac{L_{y+3}}{L_y}\cdot\frac{1}{r^3} + \ldots$$

und hieraus:

$$\overset{\angle}{R}_{x,y} = \frac{\Sigma\Sigma D_{x,y}}{D_{x,y}} \qquad 13)$$

Bei Vergleichung der Formeln 7)—13) mit den entsprechenden Rentenformeln für einfache Leben finden wir, dafs die Rentenformeln für verbundene Leben ganz ähnlich gebildet sind, wie die entsprechenden Formeln für einfache Leben, es sind blofs die diskontierten Zahlen der Lebenden durch die diskontierten Zahlen der verbundenen Paare zu ersetzen.

§ 64. Schema einer Grundtafel

(Tafel der 23 deutschen Gesellschaften für norm. Leben und Frauen;

Altersdifferenz zwischen Mann

x	$y = x - 5$	L_y	$\log L_y$	$\log D_x$	$\log D_{x,y} \frac{1}{10^5} = \log D_x L_y - 5$
1	2	3	4	5	6
89	84	5 598	3·748 033	1·997 995	0·746 028
88	83	6 913	3·839 667	2·132 539	0·972 206
87	82	8 375	3·922 985	2·262 286	1·185 271
86	81	10 010	4·000 434	2·388 200	1·388 634
85	80	11 800	4·071 882	2·510 679	1·582 561
.	.	.	.	.	. .

Die Werte von $\log D_x$ wurden der Grundtafel zur Berechnung der Leibrenten (Seite 14) entnommen und mufsten daher nicht neuerdings berechnet werden; um nicht mit zu grofsen Zahlen rechnen zu müssen, wurden von den Logarithmen der Produkte von der Form $D_x L_y$ 5 in Abzug gebracht, wodurch wir statt $D_x L_y$ und $\Sigma D_x L_y$ $\frac{1}{10^5} D_x L_y$ und $\frac{1}{10^5} \Sigma D_x L_y$ erhalten; der Wert der Rente wird dadurch nicht geändert, da

$$\frac{\frac{1}{10^5} \Sigma D_x L_y}{\frac{1}{10^5} D_x L_y} = \frac{\Sigma D_x L_y}{D_x L_y}.$$

Ein Vergleich der Rentenwerte für einfache und verbundene Leben zeigt, wie vorauszusehen, dafs durchgehends $R_{x,y} < R_x$ und auch $R_{x,y} < R_y$.

Um eine vollständige Tafel der Verbindungsrenten zu erhalten, müssen dieselben für alle möglichen Alters-Unterschiede $(x - y)$ berechnet werden.

für Verbindungs-Renten.

mit vollst. ärztlicher Untersuchung, getrennt für Männer Zinsfufs 3 %.)

und Frau: $x - y = 5$ Jahre.

$\frac{1}{10^5} D_{x,y} =$ $\frac{1}{10^5} D_x L_y$	$\frac{1}{10^5} \Sigma D_{x,y} =$ $\frac{1}{10^5} \Sigma D_x L_y$	$\log \frac{1}{10^5} \Sigma D_{x,y}$ $= \log \frac{1}{10^5} \Sigma D_x L_y$	$\log \frac{\Sigma D_{x,y}}{D_{x,y}}$ $= \log R_{x,y}$	$R_{x,y}$
7	8	9	10	11
5·57221	5·57221	0·746 028	0·000 000	1·0000
9·38007	14·95228	1·174 707	0·202 501	1·59405
15·3204	30·2727	1·481 051	0·295 780	1·97597
24·4700	54·7427	1·738 327	0·349 693	2·23714
38·2438	92·9865	1·968 420	0·385 859	2·43142
.	.	.	.	.

§ 65. Unterjährige Verbindungs-Renten.

Bei der unterjährigen anticipativen Verbindungsrente erfolgt die Zahlung der Rente zu Beginn eines jeden n-tel Jahres im jedesmaligen Betrage von $\frac{1}{n}$. Für die Zwecke der Praxis kann man annehmen, dafs die diskontierten Zahlen der verbundenen Leben innerhalb eines Jahres proportional der Zeit abnehmen, so dafs:

$$D_{x+\frac{k}{n}, y+\frac{k}{n}} = D_{x,y} - \frac{k}{n}(D_{x,y} - D_{x+1, y+1})$$

$$= \frac{n-k}{n} D_{x,y} + \frac{k}{n} D_{x+1, y+1}.$$

Da nun gesetzt werden kann:

$$R^{\frac{n}{n}}_{x,y} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{D_{x,y}} \Big[\Big(D_{x,y} + D_{x+\frac{1}{n}, y+\frac{1}{n}} + D_{x+\frac{2}{n}, y+\frac{2}{n}} + \dots + D_{x+\frac{k}{n}, y+\frac{k}{n}} + \dots + D_{x+\frac{n-1}{n}, y+\frac{n-1}{n}}\Big)$$

$$+ \Big(D_{x+1, y+1} + D_{x+1+\frac{1}{n}, y+1+\frac{1}{n}} + D_{x+1+\frac{2}{n}, y+1+\frac{2}{n}} + \dots + D_{x+1+\frac{k}{n}, y+1+\frac{k}{n}} + \dots + D_{x+1+\frac{n-1}{n}, y+1+\frac{n-1}{n}}\Big) + \dots\Big]$$

folgt weiters:

$$\overset{\frac{n}{n}}{R}_{x,y} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{D_{x,y}} \left\{ \left[D_{x,y} + \left(\frac{n-1}{n} D_{x,y} + \frac{1}{n} D_{x+1,y+1} \right) + \dots \right. \right.$$

$$+ \left(\frac{n-k}{n} D_{x,y} + \frac{k}{n} D_{x+1,y+1} \right) + \dots$$

$$\left. + \left(\frac{1}{n} D_{x,y} + \frac{n-1}{n} D_{x+1,y+1} \right) \right] + \left[D_{x+1,y+1} \right.$$

$$+ \left(\frac{n-1}{n} D_{x+1,y+1} + \frac{1}{n} D_{x+2,y+2} \right) + \dots$$

$$+ \left(\frac{n-k}{n} D_{x+1,y+1} + \frac{k}{n} D_{x+2,y+2} \right) + \dots$$

$$\left. \left. + \left(\frac{1}{n} D_{x+1,y+1} + \frac{n-1}{n} D_{x+2,y+2} \right) \right] + \dots \right\}$$

woraus sodann:

$$\overset{\frac{n}{n}}{R}_{x,y} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{D_{x,y}} \left[D_{x,y} \left(1 + \frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \dots + \frac{1}{n} \right) \right.$$

$$+ D_{x+1,y+1} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} \right)$$

$$+ D_{x+1,y+1} \left(1 + \frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

$$\left. + D_{x+2,y+2} \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n-1}{n} \right) + \dots \right]$$

und weiters:

$$\overset{\frac{n}{n}}{R}_{x,y} = \frac{1}{n} \frac{1}{D_{x,y}} \left[\frac{n(n+1)}{2n} \Sigma D_{x,y} + \frac{n(n-1)}{2n} \Sigma D_{x+1,y+1} \right]$$

und da:

$$\Sigma D_{x+1,y+1} = \Sigma D_{x,y} - D_{x,y}$$

$$\overset{\frac{n}{n}}{R}_{x,y} = \frac{1}{n} \frac{1}{D_{x,y}} \left[\Sigma D_{x,y} \left(\frac{n(n+1)}{2n} + \frac{n(n-1)}{2n} \right) \right.$$

$$\left. - \frac{n(n-1)}{2n} D_{x,y} \right]$$

und hieraus:

$$R^{\frac{n}{n}}_{x,y} = \frac{\Sigma D_{x,y}}{D_{x,y}} - \frac{n-1}{2n}$$

oder:

$$R^{\frac{n}{n}}_{x,y} = R_{x,y} - \frac{n-1}{2n} = R_{x,y} - \alpha \qquad 1)$$

analog mit der unterjährigen Leibrente für einfache Leben.

---

§ 66. Rekursionsformel für die Verbindungsrente.

Aus:

$$R_{x,y} = \frac{\Sigma D_{x,y}}{D_{x,y}} = \frac{D_{x,y} + \Sigma D_{x+1,y+1}}{D_{x,y}}$$

$$= 1 + \frac{\Sigma D_{x+1,y+1}}{D_{x+1,y+1}} \cdot \frac{D_{x+1,y+1}}{D_{x,y}}$$

folgt:

$$R_{x,y} = 1 + \frac{D_{x+1,y+1}}{D_{x,y}} R_{x+1,y+1}$$

$$= 1 + \frac{1}{r} \frac{L_{x+1}, L_{y+1}}{L_x \, . \, L_y} R_{x+1,y+1}. \qquad 1)$$

Nach Formel 1) kann die Rente eines verbundenen Paares aus der Rente eines Paares berechnet werden, dessen beide Teile um je ein Jahr älter sind.

---

§ 67. Verbindungsrente bis zum 2. Tode.

Die bisher behandelte Verbindungsrente, welche gezahlt wird, solange beide Teile des verbundenen Paares noch am Leben sind oder bis zum Tode des Erst-Sterbenden nennt man auch Verbindungsrente bis zum 1. Tode zum Unterschiede von der Verbindungsrente bis zum 2. Tode, welche gezahlt wird, solange von dem verbundenen Paare überhaupt noch eine Person am Leben ist, und deren Wert wir mit ${}^{II}R_{x,y}$ bezeichnen wollen.

Es ist leicht einzusehen, dafs:

$$^{II}R_{x,y} = R_x + R_y - R_{x,y} \qquad 1)$$

denn, solange beide Personen leben, bezieht jede derselben laut Formel 1) eine Rente im jährlichen Betrage 1, dagegen mufs das Paar jährlich den Betrag 1 rückerstatten, es erhält daher jährlich den Betrag 1; ist dagegen nur mehr eine Person des verbundenen Paares, z. B. der Mann, am Leben, so wird $R_y = 0$ und $R_{x,y} = 0$, $^{II}R_{x,y}$ geht daher in R_x über, es gelangt jährlich ebenfalls der Betrag 1 zur Auszahlung.

---

§ 68. Zweiseitige Überlebensrente.

Soll an die überlebende Person des verbundenen Paares eine Rente ausbezahlt werden, die nach dem Ableben der erst Sterbenden beginnt und gezahlt wird, so lange die überlebende Person noch am Leben ist, nennen wir diese Rente eine zweiseitige oder gegenseitige Überlebensrente und bezeichnen den Wert derselben mit $^{II}_{I}R_{x,y}$.

Würde sich das verbundene Paar auf eine Verbindungsrente bis zum 2. Tode versichern, so kommt dies einer Verbindungsrente bis zum 1. Tode und von da ab einer lebenslänglichen Rente für die überlebende Person gleich; es besteht demnach die Verbindungsrente bis zum 2. Tode aus der Verbindungsrente bis zum 1. Tode und aus der Rente vom 1. bis zum 2. Tode; diese letztere Rente ist nichts anderes, als die zweiseitige Überlebensrente; es ist demnach:

$$^{II}R_{x,y} = R_{x,y} + {}^{II}_{I}R_{x,y}, \text{ daher } {}^{II}_{I}R_{x,y} = {}^{II}R_{x,y} - R_{x,y} \qquad 1)$$

und da:

$$^{II}R_{x,y} = R_x + R_y - R_{x,y}$$

auch:

$$^{II}_{I}R_{x,y} = R_x + R_y - 2R_{x,y}. \qquad 2)$$

---

§ 69. Einseitige Überlebensrente.

Die einseitige Überlebensrente unterscheidet sich von der zweiseitigen dadurch, dafs bei der einseitigen Überlebensrente eine im vorhinein bestimmte Person des verbundenen Paares eine nach dem Ableben der andern Person des Paares beginnende Leibrente bezieht, während bei der zweiseitigen Überlebensrente die Person, die in den Genufs der Leibrente tritt, im vorhinein nicht bestimmt ist; man nennt die überlebende Person des Paares, die in den Bezug der Rente tritt, zu deren Gunsten demnach die Rente abgeschlossen wurde, die Begünstigte. Soll die Rente an die beim Abschlusse der Versicherung y-jährige Frau nach dem Ableben des Mannes gezahlt werden, so ist die Frau die Begünstigte; wir wollen den Wert dieser einseitigen Überlebensrente mit $R_{x/y}$ bezeichnen, während $R_{y/x}$ die einseitige Überlebensrente zu Gunsten des x-jährigen Mannes bezeichnen möge.

Man kann sich die sofort beginnende Leibrente für eine y-jährige Frau in zwei Teile zerlegt denken, in die bis zum Tode des Mannes zahlbare Verbindungsrente und in die sodann beginnende einseitige Überlebensrente; es ist daher:

$$R_y = R_{x,\,y} + R_{x/y}$$

mithin:

$$R_{x/y} = R_x - R_{x,\,y}. \qquad 1)$$

Die Versicherung auf eine einseitige Überlebensrente wird häufig zur Versorgung der Witwe nach dem Ableben des Mannes abgeschlossen und wird dann auch Witwen-Pension genannt oder aber zur Versorgung der Waisen nach dem Ableben des Vaters (Waisen-Pension). Doch unterscheidet sich die Waisen-Pension insofern von der Witwen-Pension in Formel 1), dafs die Waisen-Rente in der Regel nur bis zur Erreichung eines im vorhinein festgesetzten Alters, die Witwen-Rente dagegen lebenslänglich zu zahlen ist. — Ist x das Alter des Vaters, z das Alter des Kindes, welches, wenn der Vater stirbt, eine Rente im Betrage 1 bis zur Erreichung des Alters a beziehen soll, so ist ähnlich wie bei der Witwen-Rente:

$$\overset{a-z}{\overline{R}_z} = \overset{a-z}{\overline{R}_{x,\,z}} + \overset{a-z}{\overline{R}_{x/z}} \qquad 2)$$

woraus die Waisen-Pension:

$$\overset{a-s}{\overline{R}}_{x|s} = \overset{a-s}{\overline{R}}_s - \overset{a-s}{\overline{R}}_{x,s}. \qquad 3)$$

Soll die Witwen-Pension nicht zu Beginn eines jeden Jahres im Betrage 1, sondern zu Beginn eines jeden n-tel Jahres im Betrage $\frac{1}{n}$ gezahlt werden, so ist ihr Wert:

$$R_{x|y}^{\frac{n}{n}} = R_y^{\frac{n}{n}} - R_{x,y}^{\frac{n}{n}}, \qquad 4)$$

wobei vorausgesetzt wird, dafs die Zahlung der Witwen-Rente am Anfange desjenigen Jahres-n-tels beginnt, welches auf das Jahres-n-tel folgt, in welchem der Mann gestorben ist.

Begnügen wir uns für die unterjährige Rente für einfache Leben, wie auch für die unterjährige Verbindungsrente mit der Annäherung:

$$R_y^{\frac{n}{n}} = R_y - \frac{n-1}{2n}$$

und:

$$R_{x,y}^{\frac{n}{n}} = R_{x,y} - \frac{n-1}{2n},$$

so folgt:

$$R_{x|y}^{\frac{n}{n}} = \left(R_y - \frac{n-1}{2n}\right) - \left(R_{x,y} - \frac{n-1}{2n}\right)$$

oder:

$$R_{x|y}^{\frac{n}{n}} = R_y - R_{x,y} = R_{x|y}, \qquad 5)$$

d. h. der Wert der Witwen-Pension bleibt derselbe, ob die Zahlung ganzjährig oder in unterjährigen Terminen erfolgt.

---

§ 70. Steigende Witwen-Pension.

Es wird häufig eine Versicherung auf eine Witwen-Pension in der Weise abgeschlossen, dafs die Witwe eine um so höhere Rente beziehen soll, je später der Mann gestorben ist.

Die einfachste Form der steigenden Witwen-Pension ist die folgende: Stirbt der Mann im Laufe des 1. Jahres, so erhält die Witwe eine am Anfange des 2. Jahres beginnende Rente im jährlichen Betrage 1; stirbt der Mann im Laufe des 2. Jahres, so erhält die Witwe eine am Anfange des 3. Jahres beginnende Rente im jährlichen Betrage 2, u. s. w.; stirbt der Mann im Laufe des k-ten Jahres, so erhält die Witwe eine am Anfange des $(k+1)$-ten Jahres beginnende Rente im Betrage k.

Die Wahrscheinlichkeit, dafs der Mann im k-ten Jahre stirbt, ist

$$\frac{T_{x+k-1}}{L_x} = \frac{L_{x+k-1} - L_{x+k}}{L_x}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dafs die Frau am Ende des k-ten Jahres noch lebt, ist $\frac{L_{y+k}}{L_y}$; die Frau, die am Ende des k-ten Jahres $(y+k)$ Jahre alt ist, erhält eine Rente im jährlichen Betrage k; der auf die Zeit des Abschlusses der Versicherung diskontierte Wert dieser Rente beträgt mit Berücksichtigung der Sterbenswahrscheinlichkeit des Mannes und der Lebenswahrscheinlichkeit der Frau:

$$\frac{T_{x+k-1}}{L_x} \cdot \frac{L_{y+k}}{L_y} \cdot \frac{k R_{y+k}}{r^k}.$$

Setzen wir nun für k der Reihe nach 1, 2, 3 u. s. w., so erhalten wir als Wert der steigenden Witwen-Pension:

$$\overset{\angle}{R}_{x|y} = \frac{T_x L_{y+1}}{L_x L_y} \cdot \frac{R_{y+1}}{r} + 2\,\frac{T_{x+1} L_{y+2}}{L_x L_y}\,\frac{R_{y+2}}{r^2}$$

$$+ 3\,\frac{T_{x+2} L_{y+3}}{L_x L_y}\,\frac{R_{y+3}}{r^3} + \dots \qquad 1)$$

und da:

$$\frac{T_{x+k-1} L_{y+k}}{L_x L_y \cdot r^k} = \frac{T_{x+k-1}}{L_x}\,\frac{D_{y+k}}{D_y}$$

$$\overset{\angle}{R}_{x|y} = \frac{T_x}{L_x}\,\frac{D_{y+1}}{D_y} R_{y+1} + 2\,\frac{T_{x+1}}{L_x}\,\frac{D_{y+2}}{D_y} R_{y+2}$$

$$+ 3\,\frac{T_{x+2}}{L_x}\,\frac{D_{y+3}}{D_y} R_{y+3} + \dots \qquad 2)$$

und, da:

$$R_{y+k} = \frac{\Sigma D_{y+k}}{D_{y+k}}, \text{ mithin: } D_{y+k} R_{y+k} = \Sigma D_{y+k}, \text{ auch:}$$

$$\overset{\angle}{R}_{x|y} = \frac{1}{L_x D_y} (T_x \Sigma D_{y+1} + 2\, T_{x+1} \Sigma D_{y+2} + 3\, T_{x+2} \Sigma D_{y+3} + \ldots) \qquad 3)$$

Zerlegen wir noch:

$$T_x \Sigma D_{y+1} + 2\, T_{x+1} \Sigma D_{y+2} + 3\, T_{x+2} \Sigma D_{y+3} + \ldots$$

in

$$\begin{aligned} T_x \Sigma D_{y+1} + T_{x+1} \Sigma D_{y+2} + T_{x+2} \Sigma D_{y+3} + T_{x+3} \Sigma D_{y+4} + \ldots \\ + T_{x+1} \Sigma D_{y+2} + T_{x+2} \Sigma D_{y+3} + T_{x+3} \Sigma D_{y+4} + \ldots \\ + T_{x+2} \Sigma D_{y+3} + T_{x+3} \Sigma D_{y+4} + \ldots \\ + T_{x+3} \Sigma D_{y+4} + \ldots \\ + \ldots \end{aligned}$$

Setzen wir ferner:

$$\mathrm{T}_x \Sigma D_{y+1} + T_{x+1} \Sigma D_{y+2} + T_{x+2} \Sigma D_{y+3} + \ldots = \Sigma(T_x \Sigma D_{y+1})$$

$$T_{x+k} \Sigma D_{y+k+1} + T_{x+k+1} \Sigma D_{y+k+2} + T_{x+k+2} \Sigma D_{y+k+3} + \ldots = \Sigma(T_{x+k} \Sigma D_{y+k+1})$$

folglich:

$$T_x \Sigma D_{y+1} + 2\, T_{x+1} \Sigma D_{y+2} + 3\, T_{x+2} \Sigma D_{y+3} + \ldots = \Sigma\Sigma(T_x \Sigma D_{y+1})$$

so erhalten wir endlich:

$$\overset{\angle}{R}_{x|y} = \frac{\Sigma\Sigma(T_x \Sigma D_{y+1})}{L_x D_y}. \qquad 4)$$

---

§ 71. Ablebensversicherung auf den ersten Tod.

Ein verbundenes Paar im Alter x, y will die Einmal-Prämie $P_{x,y}$ erlegen, damit am Ende des Sterbejahres der zuerst sterbenden Person der Betrag 1 ausbezahlt werde; es ist $P_{x,y}$ zu bestimmen.

Ist $L_x L_y$ die Anzahl der ursprünglich vorhandenen Paare, so sind nach 1, 2, 3, ... k Jahren nur mehr $L_{x+1} L_{y+1}, L_{x+2} L_{y+2}, L_{x+3} L_{y+3}, \ldots L_{x+k} L_{y+k}$ verbundene Paare am Leben.

Es werden daher im 1., 2., 3., ... k-ten Jahre:

$$(L_x L_y - L_{x+1} L_{y+1}),\ (L_{x+1} L_{y+1} - L_{x+2} L_{y+2}),$$
$$(L_{x+2} L_{y+2} - L_{x+3} L_{y+3}), \ldots (L_{x+k-1} L_{y+k-1} - L_{x+k} L_{y+k})$$

Paare durch den Tod aufgelöst und für jedes der aufgelösten Paare ist am Ende des Jahres der Betrag 1 auszubezahlen; gehen nun sämtliche $L_x L_y$ Paare die Ablebensversicherung ein, so erhalten wir:

$$L_x L_y \,.\, P_{x,y} = \frac{L_x L_y - L_{x+1} L_{y+1}}{r} + \frac{L_{x+1} L_{y+1} - L_{x+2} L_{y+2}}{r^2} + \frac{L_{x+2} L_{y+2} - L_{x+3} L_{y+3}}{r^3} + \cdots \quad 1)$$

und:

$$P_{x,y} = \frac{1}{L_x L_y}\left[\frac{L_x L_y - L_{x+1} L_{y+1}}{r} + \frac{L_{x+1} L_{y+1} - L_{x+2} L_{y+2}}{r^2} + \frac{L_{x+2} L_{y+2} - L_{x+3} L_{y+3}}{r^3} + \cdots\right] \quad 2)$$

oder:

$$P_{x,y} = \frac{1}{L_x L_y}\left(\frac{L_x L_y}{r} + \frac{L_{x+1} L_{y+1}}{r^2} + \frac{L_{x+2} L_{y+2}}{r^3} + \cdots\right) - \frac{1}{L_x L_y}\left(\frac{L_{x+1} L_{y+1}}{r} + \frac{L_{x+2} L_{y+2}}{r^2} + \frac{L_{x+3} L_{y+3}}{r^3} + \cdots\right) \quad 3)$$

Aus:

$$R_{x,y} = 1 + \frac{L_{x+1} L_{y+1}}{r \,.\, L_x L_y} + \frac{L_{x+2} L_{y+2}}{r^2 \,.\, L_x L_y} + \frac{L_{x+3} L_{y+3}}{r^3 L_x L_y} + \cdots$$

folgt jedoch:

$$\frac{1}{L_x L_y}\left(\frac{L_x L_y}{r} + \frac{L_{x+1} L_{y+1}}{r^2} + \frac{L_{x+2} L_{y+2}}{r^3} + \cdots\right) = \frac{R_{x,y}}{r}$$

und:

$$\frac{1}{L_x L_y}\left(\frac{L_{x+1} L_{y+1}}{r} + \frac{L_{x+2} L_{y+2}}{r^2} + \frac{L_{x+3} L_{y+3}}{r^3} + \cdots\right) = R_{x,y} - 1$$

folglich ist:

$$P_{x,y} = \frac{R_{x,y}}{r} - (R_{x,y} - 1)$$

oder:

$$P_{x,y} = 1 - \frac{r-1}{r} R_{x,y}. \qquad 4)$$

Diese Formel ist der Formel für die Ablebensversicherung einfacher Leben: $P_x = 1 - \frac{r-1}{r} R_x$ ganz analog.

Die Formel hätte auch direkt abgeleitet werden können durch folgende Betrachtung:

Erlegt ein verbundenes Paar den Betrag 1, so kann es zu Beginn eines jeden Jahres die Zinsen des Betrages 1 erhalten und am Ende des Jahres, in welchem das Paar durch den Tod einer der verbundenen Personen aufgelöst wird, kann der Betrag 1, der vollständig unangetastet ist, da nur die Zinsen desselben verwendet wurden, ausbezahlt werden.

Die jährlichen Zinsen des Betrages sind $i = r - 1$ und auf den Anfang des Jahres diskontiert $\frac{r-1}{r}$, folglich:

$$1 = \frac{r-1}{r} R_{x,y} + P_{x,y}$$

und:

$$P_{x,y} = 1 - \frac{r-1}{r} R_{x,y}.$$

---

§ 72. Ablebensversicherung auf den zweiten Tod.

Bezeichnet ${}^{II}P_{x,y}$ die Einmal-Prämie, welche gezahlt werden mufs, damit der Betrag 1 am Ende des Sterbejahres der länger lebenden Person des verbundenen Paares ausbezahlt werde, so können wir uns vorstellen, dafs jede der beiden Personen eine Ablebensversicherung auf den Betrag 1 abschliefst; die Anstalt müfste alsdann am Ende des Sterbejahres der zuerst Sterbenden und am Ende des Sterbejahres der zuletzt Sterbenden jedesmal den Betrag 1 ausbezahlen, sie hätte also den am Ende des Sterbejahres der zuerst Sterbenden ausbezahlten Betrag zu viel ausbezahlt; die Einmal-Prämie der Ablebensversicherung auf den 1. Tod ist $P_{x,y}$, die Einmal-Prämie ${}^{II}P_{x,y}$ für die Ablebensversicherung auf

den 2. Tod oder auf das längste von zwei verbundenen Leben ist daher:

$$^{II}P_{x,y} = P_x + P_y - P_{x,y} \qquad 1)$$

Da:

$$P_x = 1 - \frac{r-1}{r} R_x, \; P_y = 1 - \frac{r-1}{r} R_y$$

und:

$$P_{x,y} = 1 - \frac{r-1}{r} R_{x,y}$$

folgt aus 1):

$$^{II}P_{x,y} = \left(1 - \frac{r-1}{r} R_x\right) + \left(1 - \frac{r-1}{r} R_y\right) - \left(1 - \frac{r-1}{r} R_{x,y}\right)$$

oder:

$$^{II}P_{x,y} = 1 - \frac{r-1}{r} (R_x + R_y - R_{x,y}) \qquad 2)$$

und da die Verbindungsrente bis zum 2. Tode:

$$^{II}R_{x,y} = R_x + R_y - R_{x,y}$$

folgt weiters aus 2):

$$^{II}P_{x,y} = 1 - \frac{r-1}{r} {}^{II}R_{x,y}. \qquad 3)$$

---

§ 73. Einseitige Überlebensversicherung.

Ein verbundenes Paar — der Mann x, die Frau y Jahre alt — erlegt eine Einmal-Prämie $P_{x|y}$, damit am Ende des Sterbejahres des Mannes an die Frau der Betrag 1 ausbezahlt werde; eine solche Versicherung heifst eine einseitige Überlebensversicherung zu Gunsten der Frau; die Frau ist hier die Begünstigte. Würde die einseitige Überlebensversicherung zu Gunsten des Mannes abgeschlossen werden, so würden wir die Prämie derselben mit $P_{y|x}$ bezeichnen.

Gehen $L_x L_y$ Paare eine einseitige Überlebensversicherung zu Gunsten der Frau ein, so sterben im 1., 2., 3., ... k Jahre:

$$(L_x - L_{x+1}) L_y,\ (L_{x+1} - L_{x+2}) L_y,\ (L_{x+2} - L_{x+3}) L_y,\ \ldots (L_{x+k-1} - L_{x+k}) L_y$$

Männer; der Betrag 1 ist jedoch am Ende des Sterbejahres des Mannes nicht unbedingt, sondern nur dann auszubezahlen, wenn die Frau des Mannes noch am Leben ist; nun sind aber als Witwen der im 1., 2., 3., ... k-ten Jahre verstorbenen Männer am Ende des 1., 2., 3., ... k-ten Jahres noch:

$$(L_x - L_{x+1}) L_{y+1},\ (L_{x+1} - L_{x+2}) L_{y+2},\ (L_{x+2} - L_{x+3}) L_{y+3},\ \ldots (L_{x+k-1} - L_{x+k}) L_{y+k}$$

Witwen am Leben; es ist daher die Gesamt-Prämie für sämtliche $L_x L_y$ Paare:

$$L_x L_y P_{x/y} = \frac{(L_x - L_{x+1}) L_{y+1}}{r} + \frac{(L_{x+1} - L_{x+2}) L_{y+2}}{r^2} + \frac{(L_{x+2} - L_{x+3}) L_{y+3}}{r^3} + \ldots \quad 1)$$

oder:

$$L_x L_y P_{x/y} = \left(\frac{L_x L_{y+1}}{r} + \frac{L_{x+1} L_{y+2}}{r^2} + \frac{L_{x+2} L_{y+3}}{r^3} + \ldots\right) - \left(\frac{L_{x+1} L_{y+1}}{r} + \frac{L_{x+2} L_{y+2}}{r^2} + \frac{L_{x+3} L_{y+3}}{r^3} + \ldots\right) \quad 2)$$

Aus:

$$R_{x,\,y+1} = \frac{1}{L_x L_{y+1}} \left(L_x L_{y+1} + \frac{L_{x+1} L_{y+2}}{r} + \frac{L_{x+2} L_{y+3}}{r^2} + \ldots\right)$$

folgt:

$$\frac{L_x L_{y+1}}{r} + \frac{L_{x+1} L_{y+2}}{r^2} + \frac{L_{x+2} L_{y+3}}{r^3} + \ldots = \frac{L_x L_{y+1} R_{x,\,y+1}}{r}$$

und aus

$$R_{x,y} = \frac{1}{L_x L_y}\left(L_x L_y + \frac{L_{x+1} L_{y+1}}{r} + \frac{L_{x+2} L_{y+2}}{r^2} + \frac{L_{x+3} L_{y+3}}{r^3} + \ldots\right)$$

$$\frac{L_{x+1} L_{y+1}}{r} + \frac{L_{x+2} L_{y+2}}{r^2} + \frac{L_{x+3} L_{y+3}}{r^3} + \ldots = L_x L_y (R_{x,y} - 1),$$

mithin:

$$L_x L_y P_{x/y} = \frac{L_x L_{y+1} R_{x,y+1}}{r} - L_x L_y (R_{x,y} - 1) \quad 3)$$

und:

$$P_{x/y} = \frac{L_{y+1}}{r L_y} R_{x,y+1} - (R_{x,y} - 1) \quad 4)$$

oder, da

$$\frac{L_{y+1}}{r L_y} = \frac{D_{y+1}}{D_y}$$

$$P_{x/y} = 1 - R_{x,y} + \frac{D_{y+1}}{D_y} R_{x,y+1}. \quad 5)$$

---

§ 74. Jahres-Prämien und Prämien-Reserve.

Wir finden die Jahres-Prämie irgend einer Versicherungsart für verbundene Leben ebenso wie bei Versicherungen einfacher Leben, indem wir die Einmal-Prämie der betreffenden Versicherung durch den Wert der für die Art und Dauer der vereinbarten Prämienzahlung geltenden Rente dividieren.

Ist $V_{x,y}$ die Einmal-Prämie, $v_{x,y}$ die Jahres-Prämie der betreffenden Versicherungsart, $\hat{R}_{x,y}$ der Wert einer in gleicher Art und Dauer wie die Jahres-Prämie zahlbaren Rente im Jahresbetrage 1, so mufs der Wert der Einmal-Prämie dem Werte der Jahres-Prämien gleich sein,

$$V_{x,y} = v_{x,y} \hat{R}_{x,y}$$

mithin:

$$v_{x,y} = \frac{V_{x,y}}{\hat{R}_{x,y}}. \quad 1)$$

Bei der Erlebensversicherung oder bei der aufgeschobenen Verbindungsrente wird die Jahres-Prämie längstens die Aufschubszeit hindurch gezahlt werden, jedoch nur solange beide Personen des verbundenen Paares noch am Leben sind; es ist daher $\hat{R}_{x,y}$ in der Regel eine kurze, die Aufschubszeit hindurch zahlbare Verbindungsrente;

$$\hat{R}_{x,} = \overset{a}{\overline{R}}_{x,y}$$

und die Jahres-Prämie für die Erlebensversicherung:

$$^{a}e_{x,y} = \frac{^{a}E_{x,y}}{\overset{a}{\overline{R}}_{x,y}} = \frac{D_{x+a,\, y+a}}{\Sigma D_{x,y} - \Sigma D_{x+a,\, y+a}} \qquad 2)$$

und für die aufgeschobene Verbindungsrente:

$$^{a}\overline{r}_{x,y} = \frac{^{a}\overline{R}_{x,y}}{\overset{a}{\overline{R}}_{x,y}} = \frac{\Sigma D_{x+a,\, y+a}}{\Sigma D_{x,y} - \Sigma D_{x+a,\, y+a}} \qquad 3)$$

Die Jahresprämie der gegenseitigen und der einseitigen Überlebensrente wird in der Regel gezahlt werden, solange beide Personen des verbundenen Paares noch am Leben sind, d. h. $\hat{R}_{x,y}$ ist eine Verbindungsrente bis zum 1. Tode; denn wenn auch bei der einseitigen Überlebensrente (Witwen- oder Waisen-Pension) der Mann oder Vater als Versorger die Prämien zahlt, so hat er nach dem Ableben der Frau oder des Kindes keinen Grund, die Prämien weiter zu zahlen; dasselbe ist bei der steigenden Witwen-Pension der Fall.

Wir erhalten daher die Jahres-Prämien:

für die gegenseitige Überlebensrente:

$$\frac{{}^{II}_{I}R_{x,y}}{R_{x,y}} = \frac{R_x + R_y - 2R_{x,y}}{R_{x,y}} = \frac{R_x + R_y}{R_{x,y}} - 2 \qquad 4)$$

für die einseitige Überlebensrente:

$$\frac{R_{x|y}}{R_{x,y}} = \frac{R_y - R_{x,y}}{R_{x,y}} = \frac{R_y}{R_{x,y}} - 1 \qquad 5)$$

für die steigende Witwenrente:

$$\frac{\overset{\angle}{R}_{x|y}}{R_{x,y}} = \frac{\Sigma\Sigma(T_x \Sigma D_{y+1})}{\Sigma L_x D_y}. \qquad 6)$$

Bei der Ablebensversicherung auf den 1. Tod und bei der einseitigen Überlebensversicherung wird die Jahresprämie ebenfalls bis zum 1. Tode gezahlt werden, die Jahresprämien sind daher:

$$\frac{P_{x,y}}{R_{x,y}} = \frac{1 - \frac{r-1}{r} R_{x,y}}{R_{x,y}} = \frac{1}{R_{x,y}} - \frac{r-1}{r} \qquad 7)$$

für die Ablebensversicherung auf den 1. Tod und:

$$\frac{P_{x|y}}{R_{x,y}} = \frac{1 - R_{x,y} + \frac{D_{y+1}}{D_y} R_{x,\,y+1}}{R_{x,y}} \qquad 8)$$

für die einseitige Überlebensversicherung.

Bei der Ablebensversicherung auf den 2. Tod kann die Jahresprämie entweder bis zum 1. oder bis zum 2. Tode gezahlt werden; die Jahresprämie ist daher bei der Zahlung bis zum 1. Tode:

$$\frac{{}^{II}P_{x,y}}{R_{x,y}} = \frac{1 - \frac{r-1}{r}\,{}^{II}R_{x,y}}{R_{x,y}} = \frac{1}{R_{x,y}} - \frac{r-1}{r}\,\frac{{}^{II}R_{x,y}}{R_{x,y}}$$

$$= \frac{1}{R_{x,y}} - \frac{r-1}{r}\left(\frac{R_x + R_y}{R_{x,y}} - 1\right) \qquad 9)$$

bei der Zahlung bis zum 2. Tode:

$$\frac{{}^{II}P_{x,y}}{{}^{II}R_{x,y}} = \frac{1 - \frac{r-1}{r}\,{}^{II}R_{x,y}}{{}^{II}R_{x,y}} = \frac{1}{{}^{II}R_{x,y}} - \frac{r-1}{r}$$

$$= \frac{1}{R_x + R_y - R_{x,y}} - \frac{r-1}{r}. \qquad 10)$$

Bei der Bestimmung der Prämien-Reserve müssen wir ebenso vorgehen, wie bei der Versicherung einfacher Leben.

So finden wir für die Prämien-Reserve der Ablebensversicherung auf den 1. Tod nach n Jahren bei jährlicher Prämienzahlung nach der prospektiven Methode:

$$res_n\left(\frac{P_{x,y}}{R_{x,y}}\right) = P_{x+n,y+n} - \frac{P_{x,y}}{R_{x,y}} \cdot R_{x+n,y+n} =$$

$$= 1 - \frac{r-1}{r} R_{x+n,y+n} - \left(\frac{1}{R_{x,y}} - \frac{r-1}{r}\right) R_{x+n,y+n}$$

$$= 1 - \frac{R_{x+n,y+n}}{R_{x,y}} \qquad 11)$$

ganz analog der Prämien-Reserve der Ablebensversicherung einfacher Leben.

Die Prämien-Reserve einer Witwen-Pension bei jährlicher Prämienzahlung ist nach der prospektiven Methode, so lange der Mann noch am Leben ist:

$$res_n\left(\frac{R_{x/y}}{R_{x,y}}\right) = res_n\,(r_{x/y}) = R_{x+n/y+n} - r_{x/y}\, R_{x+n,y+n} =$$

$$= R_{y+n} - R_{x+n,y+n} - r_{x/y}\, R_{x+n,y+n}$$

$$= R_{y+n} - (1 + r_{x/y})\, R_{x+n,y+n}. \qquad 12)$$

Ist der Mann nicht mehr am Leben, so findet keine Prämienzahlung mehr statt, es ist daher:

$$res_n\,(r_{x/y}) = R_{y+n}. \qquad 13)$$

---

§ 75. Verbindungsrenten für mehr als zwei verbundene Leben.

Versicherungen für mehr als 2 verbundene Leben kommen in der Praxis selten vor.

Die Verbindungsrente bis zum 1. Tode für 3 verbundene Leben kann ähnlich abgeleitet werden, wie für 2 verbundene Leben.

Es ist

$$R_{x,y,z} = \frac{1}{L_x\, L_y\, L_z}\left(1 + \frac{L_{x+1}\, L_{y+1}\, L_{z+1}}{r} + \frac{L_{x+2}\, L_{y+2}\, L_{z+2}}{r^2} + \ldots\right) \qquad 1)$$

und nach x diskontiert:

$$R_{x,y,z} = \frac{L_y L_z D_x + L_{y+1} L_{z+1} D_{x+1} + L_{y+2} L_{z+2} D_{x+2} + \dots}{L_y L_z D_x}$$

$$= \frac{\Sigma L_y L_z D_x}{L_y L_z D_x}. \qquad 2)$$

Wir hätten ebenso nach y oder nach z diskontieren können und erhalten sodann:

$$R_{x,y,z} = \frac{\Sigma L_y L_z D_x}{L_y L_z D_x} = \frac{\Sigma L_x L_z D_y}{L_x L_z D_y} = \frac{\Sigma L_x L_y D_z}{L_x L_y D_z} \qquad 3)$$

oder allgemein:

$$R_{x,y,z} = \frac{\Sigma D_{x,y,z}}{D_{x,y,z}} \qquad 4)$$

welche Form anzeigt, dafs die Diskontierung beliebig nach x, y oder z vorgenommen werden kann, jedoch mufs die Diskontierung im Zähler und im Nenner auf dieselbe Art erfolgen.

Die Verbindungsrente bis zum 2. Tode für 3 Personen ergiebt sich nach der Methode der unbestimmten Koëffizienten wie folgt; es sei:

$$^{II}R_{x,y,z} = \alpha_1 R_x + \alpha_2 R_y + \alpha_3 R_z + \beta_1 R_{x,y} + \beta_2 R_{x,z} + \beta_3 R_{y,z} + \gamma R_{x,y,z} \qquad 5)$$

wo die Koëffizienten α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 und γ noch unbestimmt sind.

Die Rente wird im jährlichen Betrage 1 gezahlt, so lange entweder alle 3, oder noch 2 Personen am Leben sind.

Leben alle 3 Personen, ist der jährlich auszubezahlende Betrag aus 5):

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \gamma = 1.$$

Leben blofs x und y, so ist:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 = 1.$$

Leben blofs y und z, so ist:

$$\alpha_2 + \alpha_3 + \beta_3 = 1.$$

Leben blofs x und z, so ist:

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \beta_2 = 1.$$

Lebt nur mehr x, wird die Rente nicht mehr gezahlt, daher:

$$\alpha_1 = 0.$$

Lebt nur y, ist ebenso:

$$\alpha_2 = 0.$$

Lebt nur z, ebenso:

$$\alpha_3 = 0.$$

Durch Auflösung dieser 7 Gleichungen finden wir:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1 = 0\\ \alpha_2 = 0\\ \alpha_3 = 0\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}\beta_1 = 1\\ \beta_2 = 1\\ \beta_3 = 1\end{array}\right\} \gamma = -2$$

folglich aus 5):

$$^{II}R_{x,y,z} = R_{x,y} + R_{x,z} + R_{y,z} - 2\,R_{x,y,z} \tag{6}$$

Ebenso finden wir für die Verbindungsrente bis zum 3. Tode, welche gezahlt wird, solange einer der Versicherten am Leben ist:

$$^{III}R_{x,y,z} = \alpha_1 R_x + \alpha_2 R_y + \alpha_3 R_z + \beta_1 R_{x,y} + \beta_2 R_{x,z} + \beta_3 R_{y,z} + \gamma R_{x,y,z} \tag{7}$$

wenn alle 3 Personen am Leben sind:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \gamma = 1$$

wenn nur x und y am Leben sind: $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 = 1$

" " x " z " " " $\alpha_1 + \alpha_3 + \beta_2 = 1$

" " y " z " " " $\alpha_2 + \alpha_3 + \beta_3 = 1$

wenn nur x am Leben ist: $\alpha_1 = 1$

" " y " " " $\alpha_2 = 1$

" " z " " " $\alpha_3 = 1$

und nach Auflösung dieser 7 Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1 = 1\\ \alpha_2 = 1\\ \alpha_3 = 1\end{array}\right\} \left.\begin{array}{l}\beta_1 = -1\\ \beta_2 = -1\\ \beta_3 = -1\end{array}\right\} \gamma = 1$$

daher aus 7):

$$^{III}R_{x,y,z} = R_x + R_y + R_z - R_{x,y} - R_{x,z} - R_{y,z} + R_{x,y,z} \tag{8}$$

§ 76. Rückführung der Verbindungsrente für zwei Personen auf eine Leibrente für eine Person.

Die Anzahl der von L_0 gleichzeitig geborenen noch am Leben befindlichen Personen nimmt mit steigendem Alter ab; die Anzahl der Lebenden ist daher vom Alter abhängig; das Gesetz dieser Abhängigkeit ist jedoch bisher nicht bekannt. Es wurden jedoch von verschiedenen Mathematikern Formeln aufgestellt, welche die Anzahl der Lebenden als eine Funktion des Alters darstellen. Eine solche von Gompertz aufgestellte Formel lautet:

$$L_x = a\, b^{c^x}. \qquad 1)$$

Die Anzahl der Lebenden des Alters x ist durch die Konstanten a, b, c, und das Alter x ausgedrückt.

Die Rentenformel für einfache Leben:

$$R_x = 1 + \frac{1}{r} \cdot \frac{L_{x+1}}{L_x} + \frac{1}{r^2} \frac{L_{x+2}}{L_x} + \ldots = \sum_{k=0}^{k=\omega-x} \frac{1}{r^k} \frac{L_{x+k}}{L_x} \qquad 2)$$

wo ω das höchste Alter der Sterblichkeitstafel bezeichnet, wird sich bei Anwendung der Gompertz'schen Formel folgendermaſsen darstellen:

$$R_x = \sum_{k=0}^{k=\omega-x} \frac{1}{r^k} \frac{a \,.\, b^{c^{x+k}}}{a \,.\, b^{c^x}} = \sum_{k=0}^{k=\omega-x} \frac{1}{r^k} b^{c^{x+k} - c^x}$$

$$= \sum_{k=0}^{k=\omega-x} \frac{1}{r^k} b^{c^x (c^k - 1)} \qquad 3)$$

während wir für die Verbindungsrente bis zum 1. Tode für 2 Personen:

$$R_{x,y} = 1 + \frac{1}{r} \frac{L_{x+1}}{L_x} \cdot \frac{L_{y+1}}{L_y} + \frac{1}{r^2} \frac{L_{x+2}}{L_x} \cdot \frac{L_{y+2}}{L_y} + \ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{k=\omega-x} \frac{1}{r^k} \frac{L_{x+k}}{L_x} \frac{L_{y+k}}{L_y} \qquad 4)$$

bei Anwendung der Gompertz'schen Formel erhalten:

$$R_{x,y} = \sum_{k=0}^{k=\omega-x} \frac{1}{r^k} \cdot \frac{a \cdot b^{c^{x+k}}}{a \cdot b^{c^x}} \cdot \frac{a \cdot b^{c^{y+k}}}{a \cdot b^{c^y}}$$

$$= \sum_{k=0}^{k=\omega-x} \frac{1}{r^k} b^{c^{x+k} - c^x} \cdot b^{c^{y+k} - c^y}$$

$$= \sum_{k=0}^{k=\omega-x} \frac{1}{r^k} b^{c^x(c^k-1)} \cdot b^{c^y(c^k-1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{k=\omega-x} \frac{1}{r^k} b^{(c^k-1)(c^x+c^y)}. \qquad 5)$$

Setzen wir nun:

$$c^x + c^y = c^z, \qquad 6)$$

so geht die Formel 5) über in:

$$R_{x,y} = \sum_{k=0}^{k=\omega-z} \frac{1}{r^k} b^{c^z(c^k-1)}, \qquad 7)$$

es ist daher, da nach 3):

$$\sum_{k=0}^{k=\omega-z} \frac{1}{r^k} b^{c^z(c^k-1)} = R_z$$

$$R_{x,y} = R_z. \qquad 8)$$

Der Wert von z ergiebt sich aus 6):

$$z = \frac{\log(c^x + c^y)}{\log c}. \qquad 9)$$

Es ist daher bei Anwendung der Gompertz'schen Formel die Verbindungsrente für ein verbundenes Paar auf die Rente für eine Person zurückgeführt, wodurch die Berechnung von Verbindungsrenten vollständig erspart wird.

Wenn man für z aus 9) keinen ganzzahligen Wert, sondern etwa den Wert: $m + \frac{\mu}{\nu}$ erhält, so ist näherungsweise:

$$R_z = R_{m+\frac{\mu}{\nu}} = R_m - \frac{\mu}{\nu}(R_m - R_{m+1}) = \left(1 - \frac{\mu}{\nu}\right) R_m + \frac{\mu}{\nu} R_{m+1}. \qquad 10)$$

§ 77. Rückführung einer Verbindungsrente für zwei Personen verschiedenen Alters auf eine Verbindungsrente für zwei Personen gleichen Alters.

Die Gompertz'sche Formel wurde von Makeham verbessert, wodurch sich dieselbe an viele Sterblichkeitstafeln besser anschliefst, als die Gompertz'sche.

Die verbesserte Gompertz-Makeham'sche Formel lautet:

$$L_x = a \cdot b^x \cdot c^{d^x}, \qquad 1)$$

welche Formel 4 Konstanten a, b, c und d enthält.

Nach dieser Formel ist nun:

$$\frac{L_{x+k}}{L_x} = \frac{a \cdot b^{x+k} \cdot c^{d^{x+k}}}{a \cdot b^x \cdot c^{d^x}} = b^k \cdot c^{(d^{x+k} - d^x)} = b^k \cdot c^{d^x (d^k - 1)} \qquad 2)$$

und ebenso:

$$\frac{L_{y+k}}{L_y} = b^k c^{d^y (d^k - 1)}.$$

Wir erhalten daher für die Verbindungsrente bis zum 1. Tode:

$$R_{x,y} = \sum_{k=0}^{k=\omega-x} \frac{1}{r^k} \frac{L_{x+k}}{L_x} \cdot \frac{L_{y+k}}{L_y}$$

$$= \sum_{k=0}^{k=\omega-x} \frac{1}{r^k} b^{2k} c^{(d^k - 1)(d^x + d^y)} \qquad 3)$$

und für die Verbindungsrente zweier gleichalteriger Personen vom Alter z aus 3), wenn sowohl x, als auch $y = z$ gesetzt wird:

$$R_{z,z} = \sum_{k=0}^{k=\omega-z} \frac{1}{r^k} b^{2k} c^{(d^k - 1) \cdot 2d^z}. \qquad 4)$$

Formel 3) geht in Formel 4) über, wenn:

$$d^x + d^y = 2d^z, \qquad 5)$$

woraus:

$$z = \frac{\log(d^x + d^y) - \log 2}{\log d}, \tag{6)}$$

wodurch die Verbindungsrente für zwei Personen verschiedenen Alters auf eine Verbindungsrente für zwei Personen gleichen Alters zurückgeführt wird, so dafs man statt der Verbindungsrenten für alle möglichen Altersunterschiede nur die Verbindungsrente für den Altersunterschied 0 zu berechnen hat.

Vierter Abschnitt.

Invalidenversicherung.

Zehntes Kapitel.

§ 78. Aktivitäts-, Invaliditäts- und Aktivensterbenswahrscheinlichkeit.

Der Organismus des Menschen ist nicht nur Krankheiten und andern schädlichen Einflüssen und Zufällen, die den Tod desselben zur Folge haben, ausgesetzt, sondern er ist auch einer natürlichen Abnützung unterworfen, welche in Verbindung mit verschiedenen anderen äufseren Einflüssen mit der Zeit die Erwerbsunfähigkeit oder Invalidität desselben herbeiführt.

Die Invalidenversicherung beschäftigt sich mit den verschiedenen Versicherungsarten zur Sicherung von einmaligen oder jährlichen Zahlungen an den Versicherten, dessen Witwe oder Waisen für den Fall des Eintrittes der Invalidität des Versicherten.

Die Erwerbsfähigen nennen wir im Unterschiede zu den Invaliden Aktive.

Ist A_x die Anzahl der Aktiven im Alter x, A_{x+1} die Anzahl der Aktiven im Alter $(x+1)$, j_x die Anzahl der im Laufe eines Jahres von A_x Aktiven invalid Gewordenen — ohne Rücksicht darauf, ob sie im Alter $(x+1)$ noch leben oder nicht — T_x^{aa} die Anzahl der von A_x Aktiven im Laufe des Jahres in aktivem Zustande Gestorbenen, so ist

$$A_x = A_{x+1} + j_x + T_x^{aa} \qquad 1)$$

und nach Division durch A_x:

$$1 = \frac{A_{x+1}}{A_x} + \frac{\dot{j}_x}{A_x} + \frac{T_x^{aa}}{A_x}. \qquad 2)$$

$\frac{A_{x+1}}{A_x}$ nennen wir die Aktivitätswahrscheinlichkeit, d. i. die Wahrscheinlichkeit für einen Aktiven vom Alter x, nach einem Jahre als Aktiver noch zu leben, $\frac{\dot{j}_x}{A_x}$ die Invaliditätswahrscheinlichkeit, d. i. die Wahrscheinlichkeit für einen Aktiven vom Alter x, innerhalb eines Jahres invalid zu werden, endlich $\frac{T_x^{aa}}{A_x}$ die Aktiven-Sterbenswahrscheinlichkeit, oder die Wahrscheinlichkeit für einen Aktiven vom Alter x, innerhalb eines Jahres als Aktiver zu sterben.

---

§ 79. Dekremententafel der Aktiven.

Ist n dasjenige höchste Alter der Aktiven, in welchem noch keine Invaliden vorkommen, und werden die von den A_n Aktiven des Alters n im Alter $(n+1)$, $(n+2)$, $(n+3)\ldots$ bis zum höchsten vorkommenden Alter ω noch vorhandenen Aktiven in eine Tafel eingetragen, so nennen wir eine solche Tafel Dekremententafel der Aktiven.

Ist $\dot{i}_n = \frac{\dot{j}_n}{A_n}$ die Invaliditätswahrscheinlichkeit, und $t_n^{aa} = \frac{T_n^{aa}}{A_n}$ die Aktiven-Sterbenswahrscheinlichkeit, so werden von A_n Aktiven innerhalb eines Jahres $\dot{i}_n A_n$ invalid werden und $t_n^{aa} A_n$ als Aktive sterben; wir finden daher die Anzahl der Aktiven des Alters $(n+1)$:

$$A_{n+1} = A_n - \dot{i}_n A_n - t_n^{aa} A_n = A_n (1 - \dot{i}_n - t_n^{aa}) \qquad 1)$$

Die Summe a_n der Invaliditätswahrscheinlichkeit und der Aktiven-Sterbenswahrscheinlichkeit nennen wir die Ausscheidewahrscheinlichkeit:

$$a_n = \dot{i}_n + t_n^{aa}. \qquad 2)$$

Es ist daher aus 1):

$$A_{n+1} = A_n (1 - a_n). \qquad 3)$$

Ist die Ausscheidewahrscheinlichkeit für jedes Alter bekannt, so können wir mit Hilfe dieser Wahrscheinlichkeit eine Dekremententafel der Aktiven konstruieren.

Es ist:

$$A_{n+1} = A_n (1 - a_n)$$

$$A_{n+2} = A_{n+1} (1 - a_{n+1}) = A_n (1 - a_n)(1 - a_{n+1})$$

$$A_{n+3} = A_{n+2} (1 - a_{n+2}) = A_n (1 - a_n)(1 - a_{n+1})(1 - a_{n+2})$$

Allgemein:

$$A_{n+k} = A_n (1 - a_n)(1 - a_{n+1})(1 - a_{n+2}) \ldots (1 - a_{n+k-1}) \qquad 4)$$

und:

$$\log A_{n+k} = \log A_n + \log (1 - a_n) + \log (1 - a_{n+1}) + \log (1 - a_{n+2}) + \ldots + \log (1 - a_{n+k-1}) \qquad 5)$$

oder:

$$\log A_{n+k} = \log A_n + \sum_{r=0}^{r=k-1} \log (1 - a_{n+r}). \qquad 6)$$

Als statistische Grundlagen für die Invalidenversicherung dienen insbesondere die Arbeiten von Behm über die Statistik der Mortalitäts-, Invaliditäts- und Morbilitätsverhältnisse bei dem Beamtenpersonal der deutschen Eisenbahnverwaltungen, fortgesetzt von Zimmermann, dann die statistischen Arbeiten von Kaan, Küttner u. a.

Die folgende Tabelle enthält die Ausscheidewahrscheinlichkeiten für die nicht zum Zugpersonal gehörenden aktiven Eisenbahnbeamten nach Zimmermann.

x	a_x	x	a_x	x	a_x	x	a_x	x	a_x
20	0·00 928	35	0·00 986	50	0·02 899	65	0·13 267	80	0·32 300
21	892	36	0·01 049	51	3 209	66	14 559	81	33 112
22	861	37	1 112	52	3 528	67	15 888	82	33 890
23	832	38	1 177	53	3 859	68	17 267	83	34 637
24	809	39	1 239	54	4 215	69	18 706	84	35 607
25	793	40	1 318	55	4 603	70	20 219	85	36 918
26	779	41	1 403	56	5 064	71	21 818	86	38 787
27	771	42	1 498	57	5 589	72	23 517	87	41 667
28	770	43	1 609	58	6 260	73	24 901	88	46 685
29	770	44	1 730	59	7 034	74	26 243	89	57 622
30	779	45	1 855	60	7 947	75	27 447	90	1·00 000
31	799	46	1 998	61	8 868	76	28 551		
32	834	47	2 175	62	9 961	77	29 574		
33	873	48	2 380	63	0·11 051	78	30 534		
34	928	49	2 619	64	12 171	79	31 439		

Das höchste Alter der Aktiven, in welchem noch keine Invaliden vorkommen, ist laut vorhergehender Tabelle $n = 20$; die Anzahl der Aktiven des Alters 20 kann beliebig grofs angenommen werden; nachstehendes Schema zeigt die Konstruktion einer Dekremententafel der Aktiven, wobei $A_{20} = 100.000$ angenommen wurde.

x	a_{x-1}	$1-a_{x-1}$	$\log(1-a_{x-1})$	$\Sigma\log(1-a_{x-1})$	$\log A_x = \log A_{20} + \Sigma\log(1-a_{x-1})$	A_x
20					5·000000	100 000
21	0·00928	0·99072	0·995951–1	0·995951–1	4·995951	99 072
22	892	0·99108	0·996109–1	0·992060–1	4·992060	98 188
23	861	0·99139	0·996245–1	0·988305–1	4·988305	97 343
24	832	0·99168	0·996372–1	0·984677–1	4·984677	96 533
25	809	0·99191	0·996472–1	0·981149–1	4·981149	95 752
.	.	.	.	.	.	.

§ 80. Aktiven-Rente.

Soll ein Aktiver, so lange er aktiv bleibt, zu Beginn eines jeden Jahres den Betrag 1 erhalten, so heifst eine solche Rente eine vorschüssige Aktiven-Rente, der gegenwärtige Wert derselben sei R_x^a.

Ähnlich wie für die Leibrente findet man:

$$R_x^a = 1 + \frac{A_{x+1}}{A_x} \cdot \frac{1}{r} + \frac{A_{x+2}}{A_x} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{A_{x+3}}{A_x} \frac{1}{r^3} + \dots \qquad 1)$$

und, wenn wir Zähler und Nenner eines jeden Gliedes durch r^x dividieren und $\frac{A_{x+k}}{r^{x+k}} = DA_{x+k}$ setzen,

$$R_x^a = 1 + \frac{DA_{x+1}}{DA_x} + \frac{DA_{x+2}}{DA_x} + \frac{DA_{x+3}}{DA_x} + \dots \qquad 2)$$

oder:

$$R_x^a = \frac{\Sigma DA_x}{DA_x} \qquad 3)$$

wo DA_x, DA_{x+1}, DA_{x+2} ... die diskontierten Zahlen der Aktiven und:

$$\Sigma DA_x = DA_x + DA_{x+1} + DA_{x+2} + \dots \qquad 4)$$

die Summe der diskontierten Zahlen der Aktiven bezeichnet.

Ähnlich wie für aufgeschobene und kurze Leibrenten findet man auch

für aufgeschobene Aktivitäts-Renten:

$$ {}^{k}\overline{R}_x^a = \frac{\Sigma DA_{x+k}}{DA_x} \qquad 5) $$

und für kurze Aktivitäts-Renten:

$$ \overset{k}{\overline{R}}{}_x^a = \frac{\Sigma DA_x - \Sigma DA_{x+k}}{DA_x}. \qquad 6) $$

---

§ 81. Invaliden-Rente.

Ist eine Dekrementen-Tafel der Invaliden J_x, J_{x+1}, J_{x+2}, J_{x+3} ... gegeben, d. h. ist die Anzahl der von J_x Invaliden im Alter x nach 1, 2, 3 ... Jahren noch am Leben befindlichen Invaliden bekannt, so läſst sich daraus der Wert $\overset{i}{R}_x$ der vorschüssigen Invaliden-Rente, d. i. einer Rente im jährlichen Betrage 1, welche an einen Invaliden zu Beginn eines jeden Jahres vom Alter x bis zu seinem Tode gezahlt wird, bestimmen.

Man findet ähnlich wie bei der gewöhnlichen Leibrente:

$$ \overset{i}{R}_x = 1 + \frac{DJ_{x+1}}{DJ_x} + \frac{DJ_{x+2}}{DJ_x} + \frac{DJ_{x+3}}{DJ_x} + \ldots = \frac{\Sigma DJ_x}{DJ_x}, \qquad 1) $$

wo DJ_x, DJ_{x+1}, DJ_{x+2} ... die diskontierten Zahlen der Invaliden bezeichnet.

Ist $\overset{i}{t}_x$ die Invaliden-Sterbenswahrscheinlichkeit für einen x-jährigen, d. h. ist $\overset{i}{t}_x$ die Wahrscheinlichkeit für einen x-jährigen Invaliden, innerhalb eines Jahres zu sterben, so ist $(1 - \overset{i}{t}_x)$ die Wahrscheinlichkeit für einen x-jährigen Invaliden, nach einem Jahre noch am Leben zu sein.

Es ist daher:

$$ J_{x+1} = J_x(1 - \overset{i}{t}_x). \qquad 2) $$

Ist n das niedrigste Alter, in welchem bereits Invalide

vorhanden sind, die willkürlich angenommene Anzahl derselben J_n, so ist:

$$J_{n+1} = J_n(1 - \overset{i}{t}_n),\ J_{n+2} = J_{n+1}(1 - \overset{i}{t}_{n+1})$$
$$= J_n(1 - \overset{i}{t}_n)(1 - \overset{i}{t}_{n+1})$$

allgemein:

$$J_{n+k} = J_n(1 - \overset{i}{t}_n)(1 - \overset{i}{t}_{n+1})(1 - \overset{i}{t}_{n+2})\ldots(1 - \overset{i}{t}_{n+k-1}) \quad 3)$$

und:

$$\log J_{n+k} = \log J_n + \log(1 - \overset{i}{t}_n) + \log(1 - \overset{i}{t}_{n+1})$$
$$+ \log(1 - \overset{i}{t}_{n+2}) + \ldots + \log(1 - \overset{i}{t}_{n+k-1}), \quad 4)$$

mittels welcher Formel die Absterbeordnung der Invaliden auf dieselbe Weise konstruiert werden kann, wie die Dekrementen-Tafel der Aktiven.

Die Invaliden-Sterbenswahrscheinlichkeiten nach Zimmermann sind in folgender Tabelle enthalten:

x	$\overset{i}{t}_x$	x	$\overset{i}{t}_x$	x	$\overset{i}{t}_x$	x	$\overset{i}{t}_x$	x	$\overset{i}{t}_x$	x	$\overset{i}{t}_x$
20	0·1020	33	0·0640	46	0·0525	59	0·0501	72	0·0865	85	0·2360
21	0·0981	34	639	47	520	60	512	73	922	86	2575
22	943	35	639	48	516	61	529	74	992	87	2820
23	905	36	639	49	512	62	550	75	0·1068	88	3104
24	868	37	639	50	510	63	573	76	1161	89	3436
25	831	38	639	51	503	64	602	77	1261	90	3832
26	795	39	633	52	496	65	629	78	1383	91	4313
27	757	40	622	53	486	66	653	79	1491	92	4918
28	720	41	599	54	485	67	685	80	1626	93	5720
29	685	42	583	55	485	68	715	81	1736	94	6900
30	656	43	558	56	487	69	744	82	1864	95	1·0000
31	640	44	546	57	489	70	780	83	2003		
32	640	45	530	58	495	71	820	84	2171		

§ 82. Pensionsversicherung.

(Kaan'sche Methode.)

Ein x-jähriger Aktiver schliefst eine Pensionsversicherung auf eine nach Eintritt seiner Invalidität zu Beginn eines jeden Jahres bis zu seinem Tode an ihn zu zahlende Rente im jährlichen Betrage 1 ab; es ist die Einmal-Prämie P_x dieser Pensionsversicherung zu bestimmen.

Nehmen wir an, sämtliche A_x Aktive des Alters x der Dekremententafel der Aktiven schliefsen eine solche Pensions-

versicherung ab; der gegenwärtige Wert der Zahlungen sämtlicher Versicherten an die Anstalt beträgt daher $A_x P_x$.

Innerhalb eines Jahres werden von A_x Aktiven im Alter x: $A_x i_x = j_x$, von A_{x+1} Aktiven im Alter $(x+1)$: $A_{x+1} i_{x+1} = j_{x+1}$ u. s. w., allgemein von A_{x+k} Aktiven im Alter $(x+k)$: $A_{x+k} i_{x+k} = j_{x+k}$ Personen invalid.

Doch treten nicht alle j_x, beziehungsweise $j_{x+1}, j_{x+2} \ldots j_{x+k}$ Personen in den Genufs der Rente, da ein Teil derselben noch im Laufe desselben Jahres, vor dem Beginne des Rentenbezuges, stirbt.

Da der Zeitpunkt des Eintrittes der Invalidität für die $j_x, j_{x+1}, j_{x+2} \ldots$ innerhalb eines Jahres invalid gewordenen Personen sich gleichmäfsig auf das ganze Jahr verteilt, können wir annähernd annehmen, dafs dieselben in der Mitte des Jahres invalid geworden sind, sie sind daher bis zum Beginne des Rentenbezuges noch ein halbes Jahr mit der Sterbenswahrscheinlichkeit eines Invaliden dem Absterben ausgesetzt; wir können hiebei annehmen, dafs die Wahrscheinlichkeit, innerhalb eines halben Jahres zu sterben, halb so grofs ist, als die Wahrscheinlichkeit innerhalb eines ganzen Jahres zu sterben.

Bezeichnet $\overset{ai}{L}_{x+1}, \overset{ai}{L}_{x+2}, \overset{ai}{L}_{x+3} \ldots$ die aus $A_x, A_{x+1}, A_{x+2} \ldots$ Aktiven innerhalb eines Jahres hervorgegangenen und am Ende des Jahres noch lebenden Invaliden, so ist:

$$\overset{ai}{L}_{x+1} = j_x\left(1 - \frac{\overset{i}{t}_x}{2}\right) = A_x i_x \left(1 - \frac{\overset{i}{t}_x}{2}\right),$$

$$\overset{ai}{L}_{x+2} = j_{x+1}\left(1 - \frac{\overset{i}{t}_{x+1}}{2}\right) = A_{x+1} i_{x+1} \left(1 - \frac{\overset{i}{t}_{x+1}}{2}\right),$$

$$\overset{ai}{L}_{x+3} = j_{x+2}\left(1 - \frac{\overset{i}{t}_{x+2}}{2}\right) = A_{x+2} i_{x+2} \left(1 - \frac{\overset{i}{t}_{x+2}}{2}\right) \text{ u. s. w.}$$

An jeden der im 1. Jahre invalid Gewordenen und am Ende des 1. Jahres noch lebenden Invaliden ist vom Beginne des 2. Jahres angefangen jährlich der Betrag 1 oder ein für allemal der Wert $\overset{i}{R}_{x+1}$ einer Invalidenrente für einen $(x+1)$-jährigen auszuzahlen; der gegenwärtige Wert dieser Zahlung beträgt: $\dfrac{\overset{ai}{L}_{x+1} \overset{i}{R}_{x+1}}{r}$.

Ebenso ist der gegenwärtige Wert aller künftigen Zahlungen für die im Laufe des 2. Jahres invalid gewordenen und am Ende des Jahres noch lebenden Personen: $\frac{L^{ai}_{x+2} R^{i}_{x+2}}{r^2}$ u. s. w.

Es ist daher:

$$A_x P_x = \frac{L^{ai}_{x+1} R^{i}_{x+1}}{r} + \frac{L^{ai}_{x+2} R^{i}_{x+2}}{r^2} + \frac{L^{ai}_{x+3} R^{i}_{x+3}}{r^3} + \ldots \quad 1)$$

und:

$$P_x = \frac{L^{ai}_{x+1}}{r A_x} R^{i}_{x+1} + \frac{L^{ai}_{x+2}}{r^2 A_x} R^{i}_{x+2} + \frac{L^{ai}_{x+3}}{r^3 A_x} R^{i}_{x+3} + \ldots \quad 2)$$

und nach erfolgter Diskontierung:

$$P_x = \frac{D L^{ai}_{x+1} R^{i}_{x+1} + D L^{ai}_{x+2} R^{i}_{x+2} + D L^{ai}_{x+3} R^{i}_{x+3} + \ldots}{D A_x} \quad 3)$$

oder:

$$P_x = \frac{\Sigma D L^{ai}_{x+1} R^{i}_{x+1}}{D A_x} \quad 4)$$

wo allgemein:

$$D L^{ai}_{x+k} = \frac{L^{ai}_{x+k}}{r^{x+k}}.$$

Die Berechnung von P_x wird nach folgendem Schema erfolgen:

x	A_x	i_x	$1 - \frac{t^{i}_{x}}{2}$	$L^{ai}_{x+1} = A_x i_x \left(1 - \frac{t^{i}_{x}}{2}\right)$	$D L^{ai}_{x+1} = \frac{L^{ai}_{x+1}}{r^{x+1}}$
1	2	3	4	5	6

R^{i}_{x+1}	$D L^{ai}_{x+1} R^{i}_{x+1}$	$\Sigma D L^{ai}_{x+1} R^{i}_{x+1}$	$D A_x$	$P_x = \frac{\Sigma D L^{ai}_{x+1} R^{i}_{x+1}}{D A_x}$
7	8	9	10	11

Die Invalidenrenten in der 7. Kolonne müssen auf die im § 81 gezeigte Art vorher berechnet und die gefundenen Werte sodann hier eingesetzt werden.

Die folgende Tabelle enthält die in die 3. Kolonne einzusetzenden Invaliditätswahrscheinlichkeiten für nicht zum Zugpersonal gehörende Eisenbahnbeamte nach Zimmermann.

x	i_x	x	i_x	x	i_x	x	i_x	x	i_x	x	i_x
20	0·00021	32	0·00131	44	0·00626	56	0·03059	68	0·13166	80	0·23134
21	26	33	156	45	698	57	3507	69	14479	81	23537
22	33	34	187	46	771	58	4069	70	15781	82	23922
23	40	35	220	47	887	59	4695	71	17085	83	24409
24	47	36	248	48	0·01026	60	5427	72	18374	84	25046
25	54	37	282	49	1178	61	6185	73	19246	85	25914
26	62	38	310	50	1375	62	7039	74	19975	86	27164
27	71	39	341	51	1609	63	7914	75	20617	87	29125
28	80	40	382	52	1838	64	8814	76	21197	88	32641
29	85	41	437	53	2075	65	9752	77	21730	89	40773
30	96	42	488	54	2373	66	0·10851	78	22226	90	0·80000
31	0·00113	43	554	55	2687	67	12009	79	22692		

§ 83. Pensionsversicherung.

(Karup'sche Methode.)

Bezeichnen wir die Anzahl der aus den A_x Aktiven des Alters x hervorgegangenen, im Alter $(x+1)$, $(x+2)$, $(x+3)\ldots(x+k)$ am Leben befindlichen Invaliden mit U_{x+1}, U_{x+2}, $U_{x+3}, \ldots U_{x+k}$, so ist die Wahrscheinlichkeit für einen x-jährigen Aktiven, im Alter $(x+k)$ als Invalider zu leben: $\frac{U_{x+k}}{A_x}$; der auf den Abschluſs der Versicherung, d. i. auf das Alter x diskontierte Wert des an einen Invaliden vom Alter $(x+k)$ auszuzahlenden Betrages 1 ist demnach mit Berücksichtigung dieser Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{1}{r^k}\,\frac{U_{x+k}}{A_x};$$

setzen wir nun für k der Reihe nach die Werte 1, 2, 3… bis zum höchsten Alter, so erhalten wir die Einmal-Prämie P_x der Pensionsversicherung für einen x-jährigen Aktiven.

Es ist demnach:

$$P_x = \frac{1}{r}\frac{U_{x+1}}{A_x} + \frac{1}{r^2}\frac{U_{x+2}}{A_x} + \frac{1}{r^3}\frac{U_{x+3}}{A_x} + \ldots \qquad 1)$$

Ist n das höchste Alter, in welchem sämtliche Lebenden der Absterbeordnung noch aktiv sind, und bezeichnen wir die Anzahl sämtlicher aus den A_n Aktiven des Alters n im Laufe der Zeit hervorgegangenen, im Alter:

$$(n+1), (n+2) \ldots x, (x+1), (x+2), \ldots (x+k)$$

noch am Leben befindlichen Invaliden mit

$$\overset{i}{L}_{n+1}, \overset{i}{L}_{n+2}, \ldots \overset{i}{L}_x, \overset{i}{L}_{x+1}, \overset{i}{L}_{x+2}, \ldots \overset{i}{L}_{x+k},$$

so ist offenbar:

$$\overset{i}{L}_{x+1} > U_{x+1}, \overset{i}{L}_{x+2} > U_{x+2}, \ldots \overset{i}{L}_{x+k} > U_{x+k},$$

da in $\overset{i}{L}_{x+1}, \overset{i}{L}_{x+2} \ldots \overset{i}{L}_{x+k}$ nicht nur die aus den A_x Aktiven des Alters x hervorgegangenen Invaliden, sondern auch die aus den im Alter x bereits vorhanden gewesenen $\overset{i}{L}_x$ Invaliden noch am Leben Befindlichen enthalten sind.

Aus der Absterbeordnung $J_x, J_{x+1}, J_{x+2} \ldots$ der Invaliden erhalten wir als Wahrscheinlichkeit für einen x-jährigen Invaliden, im Alter $(x+1)$, $(x+2)$, $(x+3) \ldots (x+k)$ noch am Leben zu sein:

$$\frac{J_{x+1}}{J_x}, \frac{J_{x+2}}{J_x}, \frac{J_{x+3}}{J_x} \ldots \frac{J_{x+k}}{J_x}.$$

Die Anzahl der aus den im Alter x bereits vorhandenen $\overset{i}{L}_x$ Invaliden im Alter $(x+1)$, $(x+2)$, $(x+3)$, $\ldots (x+k)$ noch am Leben Befindlichen ist daher:

$$\overset{i}{L}_x \frac{J_{x+1}}{J_x}, \overset{i}{L}_x \frac{J_{x+2}}{J_x}, \overset{i}{L}_x \frac{J_{x+3}}{J_x}, \ldots \overset{i}{L}_x \frac{J_{x+k}}{J_x}.$$

Da wir die Anzahl der aus den A_x Aktiven im Laufe der Zeit hervorgegangenen, in einem beliebigen höheren Alter $(x+k)$ noch am Leben befindlichen Invaliden erhalten, wenn wir von der Anzahl $\overset{i}{L}_{x+k}$ der im Alter $(x+k)$ überhaupt vorhandenen Invaliden die Anzahl derjenigen Invaliden

in Abzug bringen, die von den im Alter x bereits vorhanden gewesenen $\overset{i}{L}_x$ Invaliden im Alter $(x+k)$ noch am Leben sind, folgt:

$$U_{x+1} = \overset{i}{L}_{x+1} - \overset{i}{L}_x \frac{J_{x+1}}{J_x}$$

$$U_{x+2} = \overset{i}{L}_{x+2} - \overset{i}{L}_x \frac{J_{x+2}}{J_x}$$

$$U_{x+3} = \overset{i}{L}_{x+3} - \overset{i}{L}_x \frac{J_{x+3}}{J_x}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$U_{x+k} = \overset{i}{L}_{x+k} - \overset{i}{L}_x \frac{J_{x+k}}{J_x}$$

Nach Substituierung der für U_{x+1}, U_{x+2}, $U_{x+3}\ldots$ gefundenen Werte in der Formel 1) erhalten wir:

$$P_x = \frac{1}{A_x}\left[\frac{1}{r}\left(\overset{i}{L}_{x+1} - \overset{i}{L}_x \frac{J_{x+1}}{J_x}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\overset{i}{L}_{x+2} - \overset{i}{L}_x \frac{J_{x+2}}{J_x}\right) + \frac{1}{r^3}\left(\overset{i}{L}_{x+3} - \overset{i}{L}_x \frac{J_{x+3}}{J_x}\right) + \ldots\right]$$

oder:

$$P_x = \left(\frac{1}{r}\frac{\overset{i}{L}_{x+1}}{A_x} + \frac{1}{r^2}\frac{\overset{i}{L}_{x+2}}{A_x} + \frac{1}{r^3}\frac{\overset{i}{L}_{x+3}}{A_x} + \ldots\right) - \frac{\overset{i}{L}_x}{A_x}\left(\frac{1}{r}\frac{J_{x+1}}{J_x} + \frac{1}{r^2}\frac{J_{x+2}}{J_x} + \frac{1}{r^3}\frac{J_{x+3}}{J_x} + \ldots\right). \qquad 2)$$

Wird noch auf der rechten Seite der Gleichung 2) $\frac{\overset{i}{L}_x}{A_x}$ addiert und zugleich subtrahiert, so geht dieselbe über in:

$$P_x = \left(\frac{\overset{i}{L}_x}{A_x} + \frac{1}{r}\frac{\overset{i}{L}_{x+1}}{A_x} + \frac{1}{r^2}\frac{\overset{i}{L}_{x+2}}{A_x} + \frac{1}{r^3}\frac{\overset{i}{L}_{x+3}}{A_x} + \ldots\right) - \frac{\overset{i}{L}_x}{A_x}\left(1 + \frac{1}{r}\frac{J_{x+1}}{J_x} + \frac{1}{r^2}\frac{J_{x+2}}{J_x} + \frac{1}{r^3}\frac{J_{x+3}}{J_x} + \ldots\right). \qquad 3)$$

Nach erfolgter Diskontierung ist weiters:

$$P_x = \frac{\Sigma D \overset{i}{L}_x}{D A_x} - \frac{\overset{i}{L}_x}{A_x}\frac{\Sigma D J_x}{D J_x} \qquad 4)$$

oder, da:

$$\frac{\Sigma DJ_x}{DJ_x} = \overset{i}{R}_x \text{ und } \frac{\overset{i}{L}_x}{A_x} = \frac{D\overset{i}{L}_x}{DA_x}$$

auch:

$$P_x = \frac{\Sigma D\overset{i}{L}_x}{DA_x} - \frac{D\overset{i}{L}_x}{DA_x} \overset{i}{R}_x = \frac{\Sigma D\overset{i}{L}_x - D\overset{i}{L}_x \overset{i}{R}_x}{DA_x}. \qquad 5)$$

Die Werte $\overset{i}{L}_{n+1}$, $\overset{i}{L}_{n+2}$, $\overset{i}{L}_{n+3}\ldots$ werden auf folgende Weise berechnet:

Im Alter n sind noch alle Lebenden aktiv, mithin $\overset{i}{L}_n = 0$.

$\overset{i}{L}_{n+1}$ ist die Anzahl der aus A_n Aktiven hervorgegangenen, nach einem Jahre noch lebenden Invaliden; die Anzahl der von A_n Aktiven innerhalb eines Jahres invalide Werdenden ist $j_n = A_n i_n$; wird angenommen, dafs dieselben in der Mitte des Jahres invalid geworden sind, so leben von denselben im Alter $(n+1)$ noch:

$$\overset{i}{L}_{n+1} = j_n\left(1 - \frac{\overset{i}{t}_n}{2}\right) = A_n i_n \left(1 - \frac{\overset{i}{t}_n}{2}\right), \qquad 6)$$

Auf Grund der im § 79 bereits berechneten Dekrementen-Tafel Alter x noch am Leben befindlichen Invaliden

x	A_{x-1}	i_{x-1}	$1-\frac{\overset{i}{t}_{x-1}}{2}$	$1-\overset{i}{t}_{x-1}$	$\log A_{x-1}$	$\log i_{x-1}$	$\log\left(1-\frac{\overset{i}{t}_{x-1}}{2}\right)$	$\log A_{x-1} + \log i_{x-1} + \log\left(1-\frac{\overset{i}{t}_{x-1}}{2}\right)$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
21	100000	0·00021	0·94900		5·000000	0·322219-4	0·977266-1	1·299485
22	99072	26	95095	0·9019	4·995951	414973	978158	389082
23	98188	33	95285	9057	992058	518514	979025	489597
24	97343	40	95475	9095	988305	602060	979890	570255
25	96533	47	95660	9132	984676	672098	980730	637504
26	95752	54	95845	9169	981148	732394	981569	695111
.	.	.	.	.	.	.	.	.

wo $\overset{i}{t}_n$ die Wahrscheinlichkeit für einen Invaliden vom Alter n innerhalb eines Jahres zu sterben bezeichnet.

Die Anzahl der Invaliden vom Alter $(n+2)$ besteht aus den von den $\overset{i}{L}_{n+1}$ Invaliden des Alters $(n+1)$ nach einem Jahre noch am Leben Befindlichen, d. i. $\overset{i}{L}_{n+1}(1-\overset{i}{t}_{n+1})$ und den aus A_{n+1} Aktiven hervorgegangenen, nach einem Jahre noch am Leben befindlichen Invaliden

$$A_{n+1}\, i_{n+1}\left(1-\frac{\overset{i}{t}_{n+1}}{2}\right).$$

Es ist mithin:

$$\overset{i}{L}_{n+2}=\overset{i}{L}_{n+1}(1-\overset{i}{t}_{n+1})+A_{n+1}\, i_{n+1}\left(1-\frac{\overset{i}{t}_{n+1}}{2}\right) \qquad 7)$$

ebenso:

$$\overset{i}{L}_{n+3}=\overset{i}{L}_{n+2}(1-\overset{i}{t}_{n+2})+A_{n+2}\, i_{n+2}\left(1-\frac{\overset{i}{t}_{n+2}}{2}\right)$$

. . . .

allgemein:

$$\overset{i}{L}_{n+k}=\overset{i}{L}_{n+k-1}(1-\overset{i}{t}_{n+k-1})$$
$$+A_{n+k-1}\, i_{n+k-1}\left(1-\frac{\overset{i}{t}_{n+k-1}}{2}\right). \qquad 8)$$

---

der Aktiven wird mithin die Anzahl $\overset{i}{L}_x$ sämtlicher in einem beliebigen nach folgendem Schema berechnet:

$\log \overset{i}{L}_{x-1}$	$\log (1-\overset{i}{t}_{x-1})$	$\log \overset{i}{L}_{x-1} + \log (1-\overset{i}{t}_{x-1})$	$A_{x-1} i_{x-1}\left(1-\frac{\overset{i}{t}_{x-1}}{2}\right)$	$\overset{i}{L}_{x-1}(1-\overset{i}{t}_{x-1})$	$\overset{i}{L}_x = A_{x-1} i_{x-1}\left(1-\frac{\overset{i}{t}_{x-1}}{2}\right) + \overset{i}{L}_{x-1}(1-\overset{i}{t}_{x-1})$	x
10	11	12	13	14	15	16
— ∞	.	— ∞	19·929	0	19·929	21
1·299485	0·955158-1	1·254643	24·495	17·974	42·469	22
628072	956984	585056	30·874	38·464	69·338	23
840971	958803	799774	37·175	63·063	100·238	24
2·001032	960566	961598	43·401	91·537	134·938	25
130135	962322	2·092457	49·558	123·725	173·283	26
.	.	.	.	.	.	.

Die Kolonne 13 giebt die Anzahl der im betreffenden Jahre entstandenen, am Ende des Jahres noch lebenden Invaliden an; so gehen aus 100000 Aktiven im Alter 20: 19·929 Invalide hervor, die im Alter 21 noch leben; aus den 99072 Aktiven des Alters 21 gehen 24·495 Invalide hervor, die im Alter 22 noch leben, ebenso aus den 98188 Aktiven des Alters 22: 30·874 Invalide, die im Alter 23 noch leben u. s. w. Die Kolonne 14 giebt die Anzahl der Invaliden an, die von den am Ende des vorigen Jahres vorhanden gewesenen Invaliden noch leben; von den im Alter 21 vorhanden gewesenen 19·929 Invaliden leben im Alter 22 noch 17·974, mithin im Alter 22 zusammen 24·495 + 17·974 = 42·469 (Kolonne 15). — Von diesen 42·469 Invaliden leben im Alter 23 noch 38·464 (Kolonne 14); hiezu die in diesem Jahre invalid Gewordenen, noch am Leben befindlichen 30·874 (Kolonne 13), zusammen: 30·874 + 38·464 = 69·338. — Die Kolonne 15 wird also durch Summierung der Kolonnen 13 und 14 gebildet.

Die Einmal-Prämie P_x der Pensionsversicherung wird nun auf Grund der Karup'schen Methode nach folgendem Schema berechnet werden:

x	$\overset{i}{L}_x$	$D\overset{i}{L}_x = \frac{\overset{i}{L}_x}{r^x}$	$\Sigma D\overset{i}{L}_x$	$\overset{i}{R}_x$	$D\overset{i}{L}_x \overset{i}{R}_x$	$\Sigma D\overset{i}{L}_x - D\overset{i}{L}_x \overset{i}{R}_x$	DA_x	$P_x = \frac{\Sigma D\overset{i}{L}_x - D\overset{i}{L}_x \overset{i}{R}_x}{DA_x}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9

§ 84. Vergleichung der für die Pensionsversicherung nach der Kaan'schen und nach der Karup'schen Methode gefundenen Werte.

Die Einmal-Prämie P_x der Pensionsversicherung kann auch auf folgendem Wege abgeleitet werden:

Aus A_x Aktiven im Alter x gehen $\overset{ai}{L}_{x+1}$ am Ende des 1. Versicherungsjahres, also im Alter $(x+1)$ noch am Leben

befindliche Invalide hervor; an jeden dieser $\overset{ai}{L}_{x+1}$ Invaliden ist am Ende des 1. Versicherungsjahres der Betrag 1 auszubezahlen; der auf die Zeit des Abschlusses der Versicherung diskontierte Wert dieser Zahlungen beträgt $\frac{1}{r}\overset{ai}{L}_{x+1}$.

Da sich aus der Absterbeordnung der Invaliden als Wahrscheinlichkeit für einen Invaliden vom Alter $(x+1)$ nach 1 Jahre noch zu leben, $\frac{J_{x+2}}{J_{x+1}}$ ergiebt, werden von den $\overset{ai}{L}_{x+1}$ Invaliden im Alter $(x+2)$ noch: $\overset{ai}{L}_{x+1}\frac{J_{x+2}}{J_{x+1}}$ am Leben sein, an deren jeden am Ende des 2. Versicherungsjahres ebenfalls der Betrag 1 zu zahlen ist. Der auf den Versicherungsbeginn diskontierte Wert dieser Zahlungen beträgt: $\frac{1}{r^2}\overset{ai}{L}_{x+1}\frac{J_{x+2}}{J_{x+1}}$.

Ebenso ist der auf den Versicherungsbeginn diskontierte Wert der Zahlungen an die von den $\overset{ai}{L}_{x+1}$ Invaliden am Ende des 3. Versicherungsjahres noch am Leben befindlichen: $\frac{1}{r^3}\overset{ai}{L}_{x+1}\frac{J_{x+3}}{J_{x+1}}$ u. s. w.

Bezeichnet C_1 den auf den Versicherungsbeginn diskontierten Wert sämtlicher an die aus den A_x Aktiven im 1. Versicherungsjahre hervorgegangenen Invaliden während ihrer ganzen weiteren Lebensdauer am Ende eines jeden Jahres zu leistenden Pensionszahlungen, so folgt aus dem bisherigen:

$$C_1 = \frac{\overset{ai}{L}_{x+1}}{r} + \frac{\overset{ai}{L}_{x+1}}{r^2}\frac{J_{x+2}}{J_{x+1}} + \frac{\overset{ai}{L}_{x+1}}{r^3}\frac{J_{x+3}}{J_{x+1}} + \frac{\overset{ai}{L}_{x+1}}{r^4}\frac{J_{x+4}}{J_{x+1}} + \dots \quad 1)$$

Aus den zu Beginn des 2. Versicherungsjahres noch vorhandenen A_{x+1} Aktiven gehen innerhalb eines Jahres $\overset{ai}{L}_{x+2}$ Invalide hervor, die am Ende des 2. Versicherungsjahres, d. i. im Alter $(x+2)$ noch leben; der auf den Versicherungsbeginn diskontierte Wert C_2 der an diese $\overset{ai}{L}_{x+2}$

Invaliden während ihrer ganzen weiteren Lebensdauer zu leistenden Pensionszahlungen beträgt:

$$C_2 = \frac{\overset{ai}{L}_{x+2}}{r^2} + \frac{\overset{ai}{L}_{x+2}}{r^3}\frac{J_{x+3}}{J_{x+2}} + \frac{\overset{ai}{L}_{x+2}}{r^4}\frac{J_{x+4}}{J_{x+2}} + \dots \qquad 2)$$

Ebenso finden wir als Einmal-Wert der Pensionszahlungen für die im 3. Versicherungsjahre aus A_{x+2} Aktiven hervorgehenden Invaliden:

$$C_3 = \frac{\overset{ai}{L}_{x+3}}{r^3} + \frac{\overset{ai}{L}_{x+3}}{r^4}\frac{J_{x+4}}{J_{x+3}} + \dots \qquad 3)$$

u. s. w.

Da nun die Einmal-Prämie der Pensionsversicherung für sämtliche A_x Aktiven:

$$A_x P_x = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + \dots \qquad 4)$$

folgt:

$$\begin{aligned} P_x = \frac{1}{r}\frac{\overset{ai}{L}_{x+1}}{A_x} &+ \frac{1}{r^2}\frac{\overset{ai}{L}_{x+1}}{A_x}\cdot\frac{J_{x+2}}{J_{x+1}} + \frac{1}{r^3}\frac{\overset{ai}{L}_{x+1}}{A_x}\frac{J_{x+3}}{J_{x+1}} + \frac{1}{r^4}\frac{\overset{ai}{L}_{x+1}}{A_x}\frac{J_{x+4}}{J_{x+1}} + \dots \\ &+ \frac{1}{r^2}\frac{\overset{ai}{L}_{x+2}}{A_x} \qquad + \frac{1}{r^3}\frac{\overset{ai}{L}_{x+2}}{A_x}\frac{J_{x+3}}{J_{x+2}} + \frac{1}{r^4}\frac{\overset{ai}{L}_{x+2}}{A_x}\frac{J_{x+4}}{J_{x+2}} + \dots \\ &\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{r^3}\frac{\overset{ai}{L}_{x+3}}{A_x} \qquad + \frac{1}{r^4}\frac{\overset{ai}{L}_{x+3}}{A_x}\frac{J_{x+4}}{J_{x+3}} + \dots \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{1}{r^4}\frac{\overset{ai}{L}_{x+4}}{A_x} + \dots \qquad 5) \end{aligned}$$

Durch horizontale Summierung erhalten wir aus 5):

$$\begin{aligned} P_x = \frac{1}{r}\frac{\overset{ai}{L}_{x+1}}{A_x}&\left(1 + \frac{1}{r}\frac{J_{x+2}}{J_{x+1}} + \frac{1}{r^2}\frac{J_{x+3}}{J_{x+1}} + \frac{1}{r^3}\frac{J_{x+4}}{J_{x+1}} + \dots\right) \\ &+ \frac{1}{r^2}\frac{\overset{ai}{L}_{x+2}}{A_x}\left(1 + \frac{1}{r}\frac{J_{x+3}}{J_{x+2}} + \frac{1}{r^2}\frac{J_{x+4}}{J_{x+2}} + \dots\right) \\ &\quad + \frac{1}{r^3}\frac{\overset{ai}{L}_{x+3}}{A_x}\left(1 + \frac{1}{r}\frac{J_{x+4}}{J_{x+3}} + \dots\right) \\ &\quad + \frac{1}{r^4}\frac{\overset{ai}{L}_{x+4}}{A_x}\left(1 + \frac{1}{r}\frac{J_{x+5}}{J_{x+4}} + \dots\right) \qquad 6) \end{aligned}$$

Da nun:

$$1+\frac{1}{r}\frac{J_{x+2}}{J_{x+1}}+\frac{1}{r^2}\frac{J_{x+3}}{J_{x+1}}+\frac{1}{r^3}\frac{J_{x+4}}{J_{x+1}}+\ldots=R^{i}_{x+1}$$

$$1+\frac{1}{r}\frac{J_{x+3}}{J_{x+2}}+\frac{1}{r^2}\frac{J_{x+4}}{J_{x+2}}+\frac{1}{r^3}\frac{J_{x+5}}{J_{x+2}}+\ldots=R^{i}_{x+2}$$

$$1+\frac{1}{r}\frac{J_{x+4}}{J_{x+3}}+\frac{1}{r^2}\frac{J_{x+5}}{J_{x+3}}+\frac{1}{r^3}\frac{J_{x+6}}{J_{x+3}}+\ldots=R^{i}_{x+3} \text{ u. s. w.,}$$

folgt weiters aus 6):

$$P_x=\frac{1}{r}\frac{L^{ai}_{x+1}}{A_x}R^{i}_{x+1}+\frac{1}{r^2}\frac{L^{ai}_{x+2}}{A_x}R^{i}_{x+2}+\frac{1}{r^3}\frac{L^{ai}_{x+3}}{A_x}R^{i}_{x+3}+\ldots \quad 7)$$

und nach erfolgter Diskontierung:

$$P_x=\frac{DL^{ai}_{x+1}R^{i}_{x+1}+DL^{ai}_{x+2}R^{i}_{x+2}+DL^{ai}_{x+3}R^{i}_{x+3}+\ldots}{DA_x}$$

$$=\frac{\Sigma DL^{ai}_{x+1}R^{i}_{x+1}}{DA_x} \quad 8)$$

was mit dem nach der Kaan'schen Methode gefundenen Werte der Pensionsversicherung übereinstimmt.

Summieren wir dagegen in Formel 5) vertikal, so erhalten wir:

$$P_x=\frac{1}{r}\frac{L^{ai}_{x+1}}{A_x}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{A_x}\left(L^{ai}_{x+1}\frac{J_{x+2}}{J_{x+1}}+L^{ai}_{x+2}\right)+$$

$$+\frac{1}{r^3}\frac{1}{A_x}\left(L^{ai}_{x+1}\frac{J_{x+3}}{J_{x+1}}+L^{ai}_{x+2}\frac{J_{x+3}}{J_{x+2}}+L^{ai}_{x+3}\right)$$

$$+\frac{1}{r^4}\frac{1}{A_x}\left(L^{ai}_{x+1}\frac{J_{x+4}}{J_{x+1}}+L^{ai}_{x+2}\frac{J_{x+4}}{J_{x+2}}+L^{ai}_{x+3}\frac{J_{x+4}}{J_{x+3}}+L^{ai}_{x+4}\right)$$

$$+\ldots \quad 9)$$

Das 1. Glied: $\frac{1}{r}\frac{L^{ai}_{x+1}}{A_x}$ umfaſst den Wert der Zahlungen des 1. Jahres, das 2. Glied: $\frac{1}{r^2}\frac{1}{A_x}\left(L^{ai}_{x+1}\frac{J_{x+2}}{J_{x+1}}+L^{ai}_{x+2}\right)$ den Wert der Zahlungen des 2. Jahres, das 3. Glied:

$$\frac{1}{r^3}\frac{1}{A_x}\left(\overset{ai}{L}_{x+1}\frac{J_{x+3}}{J_{x+1}}+\overset{ai}{L}_{x+2}\frac{J_{x+3}}{J_{x+2}}+\overset{ai}{L}_{x+3}\right)$$

den Wert der Zahlungen des 3. Jahres u. s. w.

Der Koëffizient von $\frac{1}{r}\frac{1}{A_x}$, d. i. $\overset{ai}{L}_{x+1}$ ist die Anzahl der aus Aktiven hervorgegangenen, am Ende des 1. Versicherungsjahres noch am Leben befindlichen Invaliden; der Koëffizient von $\frac{1}{r^2}\frac{1}{A_x}$, d. i. $\left(\overset{ai}{L}_{x+1}\frac{J_{x+2}}{J_{x+1}}+\overset{ai}{L}_{x+2}\right)$ setzt sich aus den im 1. und 2. Versicherungsjahre entstandenen, am Ende des 2. Versicherungsjahres noch am Leben befindlichen Invaliden zusammen, ergiebt demnach die Anzahl sämtlicher aus A_x Aktiven hervorgegangenen, am Ende des 2. Versicherungsjahres noch am Leben befindlichen Invaliden; ebenso ergiebt der Koëffizient von

$$\frac{1}{r^3}\cdot\frac{1}{A_x},\ \text{d. i.}\ \left(\overset{ai}{L}_{x+1}\frac{J_{x+3}}{J_{x+1}}+\overset{ai}{L}_{x+2}\frac{J_{x+3}}{J_{x+2}}+\overset{ai}{L}_{x+3}\right)$$

die Anzahl sämtlicher aus A_x Aktiven hervorgegangenen, am Ende des 3. Versicherungsjahres noch am Leben befindlichen Invaliden u. s. w.

Es ist mithin:

$$\overset{ai}{L}_{x+1}=U_{x+1}$$

$$\overset{ai}{L}_{x+1}\frac{J_{x+2}}{J_{x+1}}+\overset{ai}{L}_{x+2}=U_{x+2}$$

$$\overset{ai}{L}_{x+1}\frac{J_{x+3}}{J_{x+1}}+\overset{ai}{L}_{x+2}\frac{J_{x+3}}{J_{x+2}}+\overset{ai}{L}_{x+3}=U_{x+3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\overset{ai}{L}_{x+1}\frac{J_{x+k}}{J_{x+1}}+\overset{ai}{L}_{x+2}\frac{J_{x+k}}{J_{x+2}}+\overset{ai}{L}_{x+3}\frac{J_{x+k}}{J_{x+3}}+\ldots+\overset{ai}{L}_{x+k}=U_{x+k},$$

wo U_{x+1}, U_{x+2}, $U_{x+3}\ldots$ dieselbe Bedeutung haben, wie im § 83.

Nach Substituierung dieser Werte in Formel 9) erhalten wir, wie in § 83, Formel 1):

$$P_x=\frac{1}{r}\frac{U_{x+1}}{A_x}+\frac{1}{r^2}\frac{U_{x+2}}{A_x}+\frac{1}{r^3}\frac{U_{x+3}}{A_x}+\ldots \qquad 10)$$

woraus im § 83 nach der Karup'schen Methode:

$$P_x = \frac{\Sigma D \overset{i}{L}_x - D \overset{i}{L}_x \overset{i}{R}_x}{D A_x}$$

abgeleitet wurde.

Die Kaan'sche und die Karup'sche Methode führen demnach zu demselben Werte der Pensionsversicherung.

---

§ 85. Pensionsversicherung mit Karenz.

Ist für die Pensionsversicherung eine k-jährige Karenz vereinbart, so heifst das, die in den ersten k Jahren invalid Werdenden erhalten keine Invalidenrente; es fallen daher in dem nach der Kaan'schen Methode gefundenen Werte:

$$P_x = \frac{D \overset{ai}{L}_{x+1} \overset{i}{R}_{x+1} + D \overset{ai}{L}_{x+2} \overset{i}{R}_{x+2} + D \overset{ai}{L}_{x+3} \overset{i}{R}_{x+3} + \ldots}{D A_x}$$

die ersten k Glieder aus, weshalb:

$$^{k}\overline{P}_x = \frac{D \overset{ai}{L}_{x+k+1} \overset{i}{R}_{x+k+1} + D \overset{ai}{L}_{x+k+2} \overset{i}{R}_{x+k+2}}{D A_x} + \frac{D \overset{ai}{L}_{x+k+3} \overset{i}{R}_{x+k+3}}{D A_x} + \ldots \qquad 1)$$

oder: $$^{k}\overline{P}_x = \frac{\Sigma D \overset{ai}{L}_{x+k+1} \overset{i}{R}_{x+k+1}}{D A_x} \qquad 2)$$

oder auch: $$^{k}\overline{P}_x = \frac{\Sigma D \overset{ai}{L}_{x+k+1} \overset{i}{R}_{x+k+1}}{D A_{x+k}} \cdot \frac{D A_{x+k}}{D A_x}$$

oder:

$$^{k}\overline{P}_x = \frac{D A_{x+k}}{D A_x} P_{x+k}. \qquad 3)$$

Um den Wert der Pensionsversicherung mit k-jähriger Karenz für einen x-jährigen Aktiven nach der Karup'schen Methode zu finden, nehmen wir an, der x-jährige Aktive versichere sich auf ein Kapital im Betrage des Wertes der Pensionsversicherung für einen $(x+k)$-jährigen, zahlbar, falls der x-jährige nach k Jahren noch aktiv ist.



Es ist daher:

$$^{k|}\overline{P}_x = \frac{1}{r^k} \frac{A_{x+k}}{A_x} P_{x+k},$$

oder diskontiert, wie in Formel 3):

$$^{k|}\overline{P}_x = \frac{DA_{x+k}}{DA_x} P_{x+k}.$$

Da laut § 83, Formel 5):

$$P_{x+k} = \frac{\Sigma D\overset{i}{L}_{x+k} - D\overset{i}{L}_{x+k} \overset{i}{R}_{x+k}}{DA_{x+k}},$$

folgt aus 3):

$$^{k|}\overline{P}_x = \frac{\Sigma D\overset{i}{L}_{x+k} - D\overset{i}{L}_{x+k} \overset{i}{R}_{x+k}}{DA_x}. \qquad 4)$$

---

§ 86. Steigende Pensionsversicherung.

Sollen die im ersten Jahre invalid Werdenden eine lebenslängliche Invalidenrente im jährlichen Betrage 1, die im 2. Jahre invalid Werdenden eine lebenslängliche Invalidenrente im jährlichen Betrage 2, . . . die im n-ten Jahre invalid Werdenden eine lebenslängliche Invalidenrente im jährlichen Betrage n erhalten, so finden wir als Einmal-Prämie $\overset{\angle}{P}_x$ dieser unbegrenzt steigenden Pensionsversicherung nach der Kaan'schen Methode:

$$\overset{\angle}{P}_x = \frac{D\overset{ai}{L}_{x+1}\overset{i}{R}_{x+1} + 2D\overset{ai}{L}_{x+2}\overset{i}{R}_{x+2} + 3D\overset{ai}{L}_{x+3}\overset{i}{R}_{x+3} + \dots}{DA_x} \qquad 1)$$

Hieraus:

$$\begin{aligned} DA_x \overset{\angle}{P}_x = & D\overset{ai}{L}_{x+1}\overset{i}{R}_{x+1} \\ & + D\overset{ai}{L}_{x+2}\overset{i}{R}_{x+2} + D\overset{ai}{L}_{x+3}\overset{i}{R}_{x+3} + D\overset{ai}{L}_{x+4}\overset{i}{R}_{x+4} + \dots \\ & + D\overset{ai}{L}_{x+2}\overset{i}{R}_{x+2} + D\overset{ai}{L}_{x+3}\overset{i}{R}_{x+3} + D\overset{ai}{L}_{x+4}\overset{i}{R}_{x+4} + \dots \\ & \qquad\qquad + D\overset{ai}{L}_{x+3}\overset{i}{R}_{x+3} + D\overset{ai}{L}_{x+4}\overset{i}{R}_{x+4} + \dots \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad + D\overset{ai}{L}_{x+4}\overset{i}{R}_{x+4} + \dots \end{aligned} \qquad 2)$$

und:

$$\overset{\angle}{P}_x = \frac{\Sigma D\overset{ai}{L}_{x+1}\overset{i}{R}_{x+1} + \Sigma D\overset{ai}{L}_{x+2}\overset{i}{R}_{x+2} + \Sigma D\overset{ai}{L}_{x+3}\overset{i}{R}_{x+3} + \dots}{DA_x} \qquad 3)$$

oder:
$$\overset{\angle}{P}_x = \frac{\Sigma\Sigma D L^{ai}_{x+1} R^{i}_{x+1}}{DA_x} \qquad 4)$$

Soll die Pension nur bis zum Höchstbetrage n steigen und dann konstant bleiben, so findet man, ähnlich wie bei der steigenden Rente:
$${}^{n|}\overline{P}_x = \frac{\Sigma\Sigma D L^{ai}_{x+1} R^{i}_{x+1} - \Sigma\Sigma D L^{ai}_{x+n+1} R^{i}_{x+n+1}}{DA_x} \qquad 5)$$

Ist überdies noch eine k-jährige Karenz vorausgesetzt, so dafs die vor Ablauf von k Jahren invalid Gewordenen keine Invalidenrente erhalten, während die im $(k+1)$-ten Jahre invalid Gewordenen eine Invalidenrente im jährlichen Betrage 1, die im $(k+2)$-ten Jahre invalid Gewordenen im jährlichen Betrage 2, die im $(k+n)$-ten und jedem späteren Jahre invalid Gewordenen eine Invalidenrente im jährlichen Betrage n erhalten, so ist die Einmal-Prämie dieser steigenden Pensionsversicherung:
$${}^{n|}_{k}\overline{P}_x = \frac{\Sigma\Sigma D L^{ai}_{x+k+1} R^{i}_{x+k+1} - \Sigma\Sigma D L^{ai}_{x+k+n+1} R^{i}_{x+k+n+1}}{DA_x} \qquad 6)$$

Soll die Pension beispielsweise nach einer Karenz von k Jahren α Prozent des Gehaltes G betragen, für jedes weitere Jahr der Teilnahme am Pensions-Institute um β Prozent steigen, im Maximum jedoch nicht mehr als $(\alpha + n\beta)$ Prozent des Gehaltes betragen, so ist die Einmal-Prämie $\hat{P}_x$ dieser Versicherung:
$$\hat{P}_x = (\alpha\,{}^{k}\overline{P}_x + \beta\,{}^{n|}_{(k+1)}\overline{P}_x)\frac{G}{100} = [(\alpha-\beta)\,{}^{k}\overline{P}_x + \beta\,{}^{(n+1)|}_{k}\overline{P}_x]\frac{G}{100} \qquad 7)$$

Soll z. B. die Pension nach 10jähriger Karenz 40 % des Gehaltes betragen, für jedes weitere Teilnahmsjahr am Pensions-Institute um 2 % des Gehaltes steigen, das Maximum von 100 % des Gehaltes jedoch nicht überschreiten, so ist in Formel 7) $k = 10$, $\alpha = 40$, $\beta = 2$, $n = 30$, folglich
$$\hat{P}_x = (0{\cdot}40\,{}^{10}\overline{P}_x + 0{\cdot}02\,{}^{30|}_{11}\overline{P}_x)\,G = (0{\cdot}38\,{}^{10}\overline{P}_x + 0{\cdot}02\,{}^{31|}_{10}\overline{P}_x)\,G \qquad 8)$$

oder:
$$\hat{P}_x = \frac{0{\cdot}38\,\Sigma D L^{ai}_{x+11} R^{i}_{x+11}}{DA_x}$$
$$+ \frac{0{\cdot}02\,(\Sigma\Sigma D L^{ai}_{x+11} R^{i}_{x+11} - \Sigma\Sigma D L^{ai}_{x+42} R^{i}_{x+42})}{DA_x}\cdot G \qquad 9)$$



oder auch:

$$\hat{P}_x = [0{\cdot}38\,{}^{10}\overline{P}_x + 0{\cdot}02\,({}^{10}\overset{\angle}{P}_x - {}^{41}\overset{\angle}{P}_x)]\,G. \qquad 10)$$

Berechnet man die Werte der aufgeschobenen konstanten und steigenden Pensionsversicherung ${}^{k}\overline{P}_x$ und ${}^{k}\overset{\angle}{P}_x$ für alle möglichen Werte von k, so läfst sich der Wert der nach einer beliebigen arithmetischen Progression steigenden Pension, ähnlich wie in Formel 10), leicht bestimmen.

Um den Wert der steigenden Pensionsversicherung nach der Karup'schen Methode zu finden, ist zu beachten, dafs:

$$\overset{\angle}{P}_x = P_x + {}^{1}\overline{P}_x + {}^{2}\overline{P}_x + {}^{3}\overline{P}_x + \ldots \qquad 11)$$

und da laut § 85, Formel 4):

$${}^{k}\overline{P}_x = \frac{\Sigma D\overset{i}{L}_{x+k} - D\overset{i}{L}_{x+k}\,\overset{i}{R}_{x+k}}{DA_x}$$

erhalten wir, wenn wir für k der Reihe nach die Werte 0, 1, 2, 3 ... einsetzen und summieren:

$$\overset{\angle}{P}_x = \frac{1}{DA_x}[(\Sigma D\overset{i}{L}_x - D\overset{i}{L}_x\,\overset{i}{R}_x) + (\Sigma D\overset{i}{L}_{x+1} - D\overset{i}{L}_{x+1}\,\overset{i}{R}_{x+1})$$
$$+ (\Sigma D\overset{i}{L}_{x+2} - D\overset{i}{L}_{x+2}\,\overset{i}{R}_{x+2}) + \ldots] \qquad 12)$$

oder:

$$\overset{\angle}{P}_x = \frac{1}{DA_x}(\Sigma D\overset{i}{L}_x + \Sigma D\overset{i}{L}_{x+1} + \Sigma D\overset{i}{L}_{x+2} + \ldots)$$
$$- \frac{1}{DA_x}(D\overset{i}{L}_x\,\overset{i}{R}_x + D\overset{i}{L}_{x+1}\,\overset{i}{R}_{x+1} + D\overset{i}{L}_{x+2}\,\overset{i}{R}_{x+2} + \ldots) \qquad 13)$$

oder endlich:

$$\overset{\angle}{P}_x = \frac{\Sigma\Sigma D\overset{i}{L}_x - \Sigma D\overset{i}{L}_x\,\overset{i}{R}_x}{DA_x} \qquad 14)$$

wo:

$$\Sigma\Sigma D\overset{i}{L}_x = \Sigma D\overset{i}{L}_x + \Sigma D\overset{i}{L}_{x+1} + \Sigma D\overset{i}{L}_{x+2} + \ldots$$

und:

$$\Sigma D\overset{i}{L}_x\,\overset{i}{R}_x = D\overset{i}{L}_x\,\overset{i}{R}_x + D\overset{i}{L}_{x+1}\,\overset{i}{R}_{x+1} + D\overset{i}{L}_{x+2}\,\overset{i}{R}_{x+2} + \ldots$$



§ 87. Steigende Pensionsversicherung bei steigendem Gehalte.

Der Jahresgehalt des Versicherten beim Abschlusse der Versicherung, d. i. beim Eintritte in das Pensions-Institut sei G, die jährliche Steigerung des Gehaltes γ, die Pension soll nach einer Karenz von k Jahren α Prozent des letzten Jahresgehaltes, nach $(k+1)$ Jahren $(\alpha+\beta)$, nach $(k+2)$ Jahren $(\alpha+2\beta)$, nach $(k+3)$ Jahren $(\alpha+3\beta)$ Prozent... des im letzten Jahre erreichten Gehaltes betragen und nach $(k+n)$ Teilnahmsjahren mit $(\alpha+n\beta)$ Prozent des letzten Gehaltes das Maximum erreichen, während für die Gehaltssteigerung eine obere Grenze nicht besteht; die Einmal-Prämie dieser Pensions-Versicherung sei Π_x, so ist, wenn wir Kürze halber $D\overset{ai}{L}_{x+m}\overset{i}{R}_{x+m}$ mit μ_m bezeichnen:

$$\Pi_x = \frac{1}{100}\cdot\frac{1}{DA_x}\left\{\begin{array}{c} \alpha[G+k\gamma]\mu_{k+1} \\ +(\alpha+\beta)[G+(k+1)\gamma]\mu_{k+2} \\ +(\alpha+2\beta)[G+(k+2)\gamma]\mu_{k+3} \\ +(\alpha+3\beta)[G+(k+3)\gamma]\mu_{k+4}+\ldots \\ +(\alpha+n\beta)[G+(k+n)\gamma]\mu_{k+n+1} \\ +(\alpha+n\beta)[G+(k+n+1)\gamma]\mu_{k+n+2} \\ +(\alpha+n\beta)[G+(k+n+2)\gamma]\mu_{k+n+3}+\ldots \end{array}\right\} \quad 1)$$

oder:

$$\Pi_x = \frac{1}{100}\cdot\frac{1}{DA_x}\left\{\begin{array}{c} (\alpha-\beta)\Big[[G+k\gamma]\mu_{k+1} \\ +[G+(k+1)\gamma]\mu_{k+2} \\ +[G+(k+2)\gamma]\mu_{k+3}+\ldots \\ +[G+(k+n)\gamma]\mu_{k+n+1} \\ +[G+(k+n+1)\gamma]\mu_{k+n+2}+\ldots\Big] \\ +\beta\Big[[G+k\gamma]\mu_{k+1} \\ +2[G+(k+1)\gamma]\mu_{k+2} \\ +3[G+(k+2)\gamma]\mu_{k+3}+\ldots \\ +(n+1)\big[[G+(k+n)\gamma]\mu_{k+n+1} \\ +[G+(k+n+1)\gamma]\mu_{k+n+2}+\ldots\big]\Big] \end{array}\right\} \quad 2)$$

Setzen wir noch: $G+(k-1)\gamma=\Gamma$, so erhalten wir:

$$
\Pi_x=\frac{1}{DA_x}\left\{\begin{gathered}
\frac{\alpha-\beta}{100}\Big[(\Gamma+\gamma)\mu_{k+1}+(\Gamma+2\gamma)\mu_{k+2}\\
+(\Gamma+3\gamma)\mu_{k+3}+\ldots+(\Gamma+\overline{n+1}\,\gamma)\mu_{k+n+1}\\
+(\Gamma+\overline{n+2}\gamma)\mu_{k+n+2}+(\Gamma+\overline{n+3}\gamma)\mu_{k+n+3}\\
+\ldots\Big]\\
+\frac{\beta}{100}\Big[(\Gamma+\gamma)\mu_{k+1}+2(\Gamma+2\gamma)\mu_{k+2}\\
+3(\Gamma+3\gamma)\mu_{k+3}+\ldots\\
+(n+1)\big[(\Gamma+\overline{n+1}\,\gamma)\mu_{k+n+1}\\
+(\Gamma+\overline{n+2}\,\gamma)\mu_{k+n+2}\\
+(\Gamma+\overline{n+3}\,\gamma)\mu_{k+n+3}+\ldots\big]
\end{gathered}\right\} \qquad 3)
$$

oder:

$$
\Pi_x=\frac{1}{DA_x}\left\{\begin{gathered}
\frac{\alpha-\beta}{100}\cdot\Gamma(\mu_{k+1}+\mu_{k+2}+\mu_{k+3}+\ldots)\\
+\frac{\alpha-\beta}{100}\gamma\Big(\mu_{k+1}+2\mu_{k+2}+3\mu_{k+3}+\ldots\\
+(n+1)\mu_{k+n+1}+(n+2)\mu_{k+n+2}+\ldots\Big)\\
+\frac{\beta}{100}\Gamma[\mu_{k+1}+2\mu_{k+2}+3\mu_{k+3}+\ldots\\
+(n+1)\mu_{k+n+1}+(n+1)\mu_{k+n+2}\\
+(n+1)\mu_{k+n+3}+\ldots]\\
+\frac{\beta}{100}\gamma\Big[\mu_{k+1}+2^2\mu_{k+2}\\
+3^3\mu_{k+3}+\ldots+(n+1)^2\mu_{k+n+1}\\
+(n+1)\Big((n+2)\mu_{k+n+2}\\
+(n+3)\mu_{k+n+3}+\ldots\Big)\Big]
\end{gathered}\right\} \qquad 4)
$$

$$
\mu_{k+1}+\mu_{k+2}+\mu_{k+3}+\mu_{k+4}+\ldots=\Sigma\mu_k \qquad 5)
$$

$$
\begin{gathered}
\mu_{k+1}+2\mu_{k+2}+3\mu_{k+3}+\ldots+n\mu_{k+n}+(n+1)\mu_{k+n+1}\\
+(n+2)\mu_{k+n+2}+\ldots=\Sigma\Sigma\mu_k
\end{gathered} \qquad 6)
$$

$$
\begin{gathered}
\mu_{k+1}+2\mu_{k+2}+3\mu_{k+3}+\ldots+n\mu_{k+n}+(n+1)\mu_{k+n+1}\\
+(n+1)\mu_{k+n+2}+(n+1)\mu_{k+n+3}+\ldots\\
=\Sigma\Sigma\mu_k-\Sigma\Sigma\mu_{k+n+2}.
\end{gathered} \qquad 7)
$$

Nun handelt es sich noch um Bestimmung des Wertes der Summe

$$\mu_{k+1} + 2^2 \mu_{k+2} + 3^2 \mu_{k+3} + \ldots + n^2 \mu_{k+n} + (n+1)^2 \mu_{k+n+1}$$
$$+ (n+1)[(n+2)\mu_{k+n+2} + (n+3)\mu_{k+n+3} + \ldots] = S. \qquad 8)$$

Bilden wir auf gleiche Weise, wie die Doppel-Summe von μ gebildet wurde, die dreifache Summe, indem wir setzen:

$$\Sigma\Sigma\Sigma\mu_{k+1} = \Sigma\Sigma\mu_{k+1} + \Sigma\Sigma\mu_{k+2} + \Sigma\Sigma\mu_{k+3} + \Sigma\Sigma\mu_{k+4} + \ldots$$
$$= \mu_{k+1} + 2\mu_{k+2} + 3\mu_{k+3} + 4\mu_{k+4} + \ldots + m \,.\, \mu_{k+m} + \ldots$$
$$+ \mu_{k+2} + 2\mu_{k+3} + 3\mu_{k+4} + \ldots + (m-1)\mu_{k+m} + \ldots$$
$$+ \mu_{k+3} + 2\mu_{k+4} + \ldots + (m-2)\mu_{k+m} + \ldots$$
$$+ \mu_{k+4} + \ldots + (m-3)\mu_{k+m} + \ldots$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$+ \mu_{k+m} + \ldots$$

$$\Sigma\Sigma\Sigma\mu_{k+1} = \mu_{k+1} + 3\mu_{k+2} + 6\mu_{k+3} + 10\mu_{k+4} + \ldots + \frac{m(m+1)}{2}\mu_{k+m} + \ldots \qquad 9)$$

Bilden wir nun:

$$2\Sigma\Sigma\Sigma\mu_{k+1} - \Sigma\Sigma\mu_{k+1},$$

so erhalten wir:

$$2\Sigma\Sigma\Sigma\mu_{k+1} - \Sigma\Sigma\mu_{k+1} =$$
$$2\mu_{k+1} + 6\mu_{k+2} + 12\mu_{k+3} + 20\mu_{k+4} + \ldots + m(m+1)\mu_{k+m} + \ldots$$
$$-(\mu_{k+1} + 2\mu_{k+2} + 3\mu_{k+3} + 4\mu_{k+4} + \ldots + m\mu_{k+m} + \ldots)$$
$$2\Sigma\Sigma\Sigma\mu_{k+1} - \Sigma\Sigma\mu_{k+1} = \mu_{k+1} + 4\mu_{k+2} + 9\mu_{k+3} + 16\mu_{k+4}$$
$$+ \ldots + m^2\mu_{k+m} + \ldots \qquad 10)$$

Nennen wir die bis ans Ende der Tafel fortzusetzende Summe

$$\mu_{k+1} + 4\mu_{k+2} + 9\mu_{k+3} + 16\mu_{k+4} + \ldots + m^2\mu_{k+m} + \ldots$$

quadratische Summe und bezeichnen sie kurz mit $\Sigma^2\mu_{k+1}$, so folgt aus 10)

$$\Sigma^2\mu_{k+1} = 2\Sigma\Sigma\Sigma\mu_{k+1} - \Sigma\Sigma\mu_{k+1}. \qquad 11)$$

Die gesuchte Summe S in 8) ist nun gleich:

$$S = \Sigma^2 \mu_{k+1} - [(n+2)\mu_{k+n+2} + 2(n+3)\mu_{k+n+3} + 3(n+4)\mu_{k+n+4} + \ldots] = \Sigma^2 \mu_{k+1} - [n(\mu_{k+n+2} + 2\mu_{k+n+3} + 3\mu_{k+n+4} + \ldots) + 2(\mu_{k+n+2} + 3\mu_{k+n+3} + 6\mu_{k+n+4} + \ldots)]$$

$$S = \Sigma^2 \mu_{k+1} - n \,.\, \Sigma\Sigma \mu_{k+n+2} - 2\Sigma\Sigma\Sigma \mu_{k+n+2} \qquad 12)$$

oder mit Berücksichtigung von 11)

$$S = 2(\Sigma\Sigma\Sigma \mu_{k+1} - \Sigma\Sigma\Sigma \mu_{k+n+2}) - (\Sigma\Sigma \mu_{k+1} + n\Sigma\Sigma \mu_{k+n+2}). \qquad 13)$$

Nach Einsetzung dieser Werte in Formel 4) erhalten wir:

$$\Pi_x = \frac{1}{DA_x}\left\{\begin{array}{l} \frac{\alpha - \beta}{100}(\Gamma \cdot \Sigma \mu_{k+1} + \gamma\, \Sigma\Sigma \mu_{k+1}) \\ + \frac{\beta}{100}\Gamma(\Sigma\Sigma \mu_{k+1} - \Sigma\Sigma \mu_{k+n+2}) \\ + \frac{\beta}{100}\gamma\,(\Sigma^2 \mu_{k+1} - n\,\Sigma\Sigma \mu_{k+n+2} \\ \quad - 2\,\Sigma\Sigma\Sigma \mu_{k+n+2}) \end{array}\right\} \qquad 14)$$

oder:

$$\Pi_x = \frac{1}{DA_x}\left\{\begin{array}{l} \frac{\alpha - \beta}{100}(\Gamma \cdot \Sigma \mu_{k+1} + \gamma \cdot \Sigma\Sigma \mu_{k+1}) \\ + \frac{\beta}{100}\Gamma(\Sigma\Sigma \mu_{k+1} - \Sigma\Sigma \mu_{k+n+2}) \\ + \frac{\beta}{100}\gamma\,[2(\Sigma\Sigma\Sigma \mu_{k+1} - \Sigma\Sigma\Sigma \mu_{k+n+2}) \\ \quad - (\Sigma\Sigma \mu_{k+1} + n\,\Sigma\Sigma \mu_{k+n+2})] \end{array}\right\} \qquad 15)$$

---

§ 88. Unbedingte Pensionierung nach einer bestimmten Anzahl von Dienstjahren (Teilnahmsjahren am Pensions-Institute).

Die bisher abgeleiteten Formeln für die Pensionsversicherung bestimmen blofs den Wert der Pensionsansprüche der invalid Werdenden, während die Statuten der Pensionsinstitute oft die Bestimmung enthalten, dafs die Pensionierung nach einer bestimmten Anzahl von Teil-

nahmsjahren unbedingt eintritt, ohne Rücksicht darauf, ob der zu Pensionierende bereits invalid oder noch aktiv ist.

Ist m die Anzahl der Dienstjahre, nach welchen die Pensionierung unbedingt eintritt, so tritt der aktive Beamte im Alter $(x + m)$ in den Genufs einer Aktivenrente, die er bezieht, so lange er aktiv ist; sobald er invalid wird, tritt er in den Genufs einer Invalidenrente. Es mufs also für den x-jährigen Aktiven eine um m Jahre aufgeschobene Aktivenrente und eine Invalidenrente versichert werden.

Zu dem Werte der Pensionsversicherung ist daher der Wert einer aufgeschobenen Aktivenrente

$$\frac{\alpha + n\beta}{100} G' \cdot {}^{m-}\overset{a}{R}_x = \frac{\alpha + n\beta}{100} G' \cdot \frac{\Sigma D A_{x+m}}{D A_x}$$

zu addieren, wo $(\alpha + n\beta)$ das Ausmafs der Pension in Prozenten nach m Dienstjahren und G' den aus dem ursprünglichen Gehalte und der Gehaltssteigerung berechenbaren Gehalt im m-ten Dienstjahre bezeichnen möge.

---

§ 89. Leibrente für einen Aktiven.

Will ein Aktiver vom Alter x eine sofort beginnende, zu Anfang eines jeden Jahres, so lange er lebt, zahlbare Rente im jährlichen Betrage 1 beziehen, so ist dies eine Leibrente für einen Aktiven; ihr Wert sei $\overset{la}{R}_x$.

Dieselbe besteht aus zwei Teilen, aus der während der Dauer der Aktivität zahlbaren Aktivenrente und der vom Eintritte der Invalidität angefangen zu Beginn eines jeden Jahres zahlbaren Pensionsversicherung im jährlichen Betrage 1. Es ist daher

$$\overset{la}{R}_x = \overset{a}{R}_x + P_x = \frac{\Sigma D A_x + \Sigma D \overset{ai}{L}_{x+1} \overset{i}{R}_{x+1}}{D A_x}.$$

---

§ 90. Kapitalsversicherung für den Fall des Eintrittes der Invalidität oder des Todes eines Aktiven.

Ein x-jähriger Aktiver will eine Einmal-Prämie M_x erlegen, damit für ihn am Ende des Jahres, in welchem er invalid wird, ein Kapital im Betrage 1 ausbezahlt werde, ohne Rücksicht darauf, ob der Versicherte noch lebt oder nicht.

Ist $\dot{i}_x, \dot{i}_{x+1}, \dot{i}_{x+2}, \ldots \dot{i}_{x+k}$ die Wahrscheinlichkeit, für einen Aktiven vom Alter x, $(x+1)$, $(x+2)$, ... $(x+k)$, innerhalb eines Jahres invalid zu werden, so ist die Wahrscheinlichkeit, für einen x-jährigen Aktiven, im Laufe des 1., 2., 3., ... k-ten Jahres invalid zu werden:

$$\dot{i}_x, \quad \frac{A_{x+1}}{A_x}\dot{i}_{x+1}, \quad \frac{A_{x+2}}{A_x}\dot{i}_{x+2}, \quad \frac{A_{x+3}}{A_x}\dot{i}_{x+3}, \ldots \quad \frac{A_{x+k}}{A_x}\dot{i}_{x+k},$$

folglich:

$$M_x = \frac{\dot{i}_x}{r} + \frac{A_{x+1}}{A_x}\frac{\dot{i}_{x+1}}{r^2} + \frac{A_{x+2}}{A_x}\frac{\dot{i}_{x+2}}{r^3} + \frac{A_{x+3}}{A_x}\frac{\dot{i}_{x+3}}{r^4} + \ldots \quad 1)$$

oder

$$M_x = \frac{1}{r}\left(\frac{A_x}{A_x}\dot{i}_x + \frac{A_{x+1}}{A_x}\frac{\dot{i}_{x+1}}{r} + \frac{A_{x+2}}{A_x}\frac{\dot{i}_{x+2}}{r^2} + \frac{A_{x+3}}{A_x}\frac{\dot{i}_{x+3}}{r^3} + \ldots\right) \quad 2)$$

$$M_x = \frac{1}{r}\frac{\Sigma \dot{i}_x D A_x}{D A_x} = \sum_{k=0}^{k=\omega-x}\frac{\dot{j}_{x+k}}{A_x r^{k+1}} = \frac{\Sigma D \dot{j}_x}{D A_x}, \quad 3)$$

wo:

$$\dot{j}_x = A_x \dot{i}_x \text{ und } \frac{\dot{j}_x}{r^{x+1}} = D\dot{j}_x.$$

Versichert sich ein x-jähriger Aktiver gegen eine Einmal-Prämie N_x in ähnlicher Weise auf ein am Ende seines Sterbejahres zahlbares Kapital 1, das jedoch nur in dem Falle zu zahlen ist, falls er als Aktiver stirbt, und sind $\overset{aa}{t_x}, \overset{aa}{t}_{x+1}, \overset{aa}{t}_{x+2} \ldots$ die Aktiven-Sterbenswahrscheinlichkeiten, so ist ähnlich:

$$N_x = \frac{\overset{aa}{t_x}}{r} + \frac{A_{x+1}}{A_x}\frac{\overset{aa}{t}_{x+1}}{r^2} + \frac{A_{x+2}}{A_x}\frac{\overset{aa}{t}_{x+2}}{r^3} + \frac{A_{x+3}}{A_x}\frac{\overset{aa}{t}_{x+3}}{r^4} + \ldots \quad 4)$$

oder:

$$N_x = \frac{1}{r}\frac{\Sigma \overset{aa}{t_x} D A_x}{A_x} = \frac{\Sigma D \overset{aa}{T_x}}{D A_x} \quad 5)$$

wo:

$$D\overset{aa}{T_x} = \frac{\overset{aa}{T_x}}{r^{x+1}}.$$

Es ist daher:

$$M_x + N_x = \frac{1}{r}\,\frac{\Sigma i_x DA_x}{DA_x} + \frac{1}{r}\,\frac{\Sigma \overset{aa}{t_x} DA_x}{DA_x} = \frac{1}{r}\,\frac{\Sigma\left(i_x + \overset{aa}{t_x}\right) DA_x}{DA_x} \qquad 6)$$

Da nun: $i_x + \overset{aa}{t_x} = a_x$ der Ausscheidewahrscheinlichkeit, ist auch:

$$M_x + N_x = \frac{1}{r}\,\frac{\Sigma a_x DA_x}{DA_x}. \qquad 7)$$

Da jedoch:

$$A_{x+1} = A_x(1 - a_x)$$

mithin:

$$a_x A_x = A_x - A_{x+1}$$

und:

$$a_x DA_x = DA_x - rDA_{x+1}$$

folglich auch:

$$\Sigma a_x DA_x = \Sigma DA_x - r\Sigma DA_{x+1} = \Sigma DA_x - r(\Sigma DA_x - DA_x)$$

oder:

$$\Sigma a_x DA_x = rDA_x - (r-1)\Sigma DA_x \qquad 8)$$

ergiebt sich:

$$M_x + N_x = 1 - \frac{r-1}{r}\,\frac{\Sigma DA_x}{DA_x} \qquad 9)$$

oder:

$$M_x + N_x = 1 - \frac{r-1}{r}\overset{a}{R_x} \qquad 10)$$

analog der Beziehung zwischen dem Werte der einfachen Ablebensversicherung und der Leibrente.

---

§ 91. Witwen-Pension.

Ein x-jähriger Aktiver erlegt eine Einmal-Prämie $W_{x,y}$, damit im Falle seines Todes an seine Witwe, so lange sie lebt, eine am Anfange jedes Jahres im jährlichen Betrage 1 zahlbare Witwenrente gezahlt werde; die erste Rentenzahlung hat demnach am Beginne des auf das Sterbejahr des Mannes folgenden Jahres stattzufinden. — Das Alter der Frau beim Abschlusse der Versicherung sei y.

Wir versichern vorerst gegen eine Einmal-Prämie $U_{x,y}$ der Frau eines jeden aus dem Aktivdienste scheidenden Mannes ohne Rücksicht darauf, ob die Ausscheidung durch Invalidität oder Tod erfolgt, eine vom Beginne des auf das Jahr des Ausscheidens folgenden Jahres laufende Leibrente.

Die Anzahl der von A_x Aktiven infolge Invalidität oder Tod im 1., 2., 3.... Jahre Ausscheidenden ist:

$$(A_x - A_{x+1}),\ (A_{x+1} - A_{x+2}),\ (A_{x+2} - A_{x+3})\ldots,$$

die Wahrscheinlichkeit für einen Aktiven vom Alter x, durch Invalidität oder Tod im 1., 2., 3.... Jahre auszuscheiden, demnach:

$$\frac{A_x - A_{x+1}}{A_x},\ \frac{A_{x+1} - A_{x+2}}{A_x},\ \frac{A_{x+2} - A_{x+3}}{A_x}\ldots,$$

die Wahrscheinlichkeit für eine y-jährige Frau, nach 1, 2, 3... Jahren noch am Leben zu sein:

$$\frac{L_{y+1}}{L_y},\ \frac{L_{y+2}}{L_y},\ \frac{L_{y+3}}{L_y}\ldots$$

Am Ende des 1. Jahres ist eine lebenslängliche Rente für eine $(y+1)$-jährige Frau,
am Ende des 2. Jahres ist eine lebenslängliche Rente für eine $(y+2)$-jährige Frau,
am Ende des 3. Jahres ist eine lebenslängliche Rente für eine $(y+3)$-jährige Frau u. s. w. zu zahlen.

Es ist demnach:

$$U_{x,y} = \frac{A_x - A_{x+1}}{A_x} \cdot \frac{L_{y+1}}{L_y} \cdot \frac{R_{y+1}}{r} + \frac{A_{x+1} - A_{x+2}}{A_x} \cdot \frac{L_{y+2}}{L_y} \frac{R_{y+2}}{r^2}$$
$$+ \frac{A_{x+2} - A_{x+3}}{A_x} \cdot \frac{L_{y+3}}{L_y} \frac{R_{y+3}}{r^3} + \ldots \qquad 1)$$

Diskontieren wir nach y, setzen wir ferner:

$$A_x - A_{x+1} = \varDelta_{x+1},\ A_{x+1} - A_{x+2} = \varDelta_{x+2},\ldots$$
$$A_{x+k} - A_{x+k+1} = \varDelta_{x+k+1},$$

so erhalten wir:

$$U_{x,y} = \frac{\varDelta_{x+1} D_{y+1} R_{y+1}}{A_x D_y} + \frac{\varDelta_{x+2} D_{y+2} R_{y+2}}{A_x D_y}$$
$$+ \frac{\varDelta_{x+3} D_{y+3} R_{y+3}}{A_x D_y} + \ldots = \frac{\Sigma \varDelta_{x+1} D_{y+1} R_{y+1}}{A_x D_y} \qquad 2)$$

oder, da:

$$R_{y+1} = \frac{\Sigma D_{y+1}}{D_{y+1}}, \text{ mithin: } D_{y+1} R_{y+1} = \Sigma D_{y+1},$$

$$U_{x,y} = \frac{\Sigma(\varDelta_{x+1} \Sigma D_{y+1})}{A_x D_y} \qquad 3)$$

Nun ist aber offenbar $U_{x,y}$ gröfser, als der Wert $W_{x,y}$ der Witwen-Pension, da die Frauen der wegen Invalidität aus dem Aktivdienste Ausgeschiedenen erst nach dem Ableben des invaliden Mannes in den Bezug der Witwenrente treten sollen.

Wir haben daher für jeden invalid Werdenden, der am Ende des Jahres, in dem er invalid wurde, noch lebt, die Verbindungsrente des invaliden Mannes und seiner Frau in Abzug zu bringen, da die Witwen-Pension nicht ausbezahlt wird, solange von dem Ehepaare sowohl die Frau, als auch der invalide Mann noch am Leben sind.

Bezeichnet $V_{x,y}$ den Gesamtwert der Verbindungsrenten, zahlbar, solange der infolge Invalidität ausgeschiedene Mann und die Frau noch am Leben sind, so ist offenbar:

$$W_{x,y} = U_{x,y} - V_{x,y}. \qquad 4)$$

Die Anzahl der im 1., 2., 3. . . . k-ten Jahre invalid gewordenen und am Ende des Jahres noch lebenden Männer ist $\overset{ai}{L}_{x+1}, \overset{ai}{L}_{x+2}, \overset{ai}{L}_{x+3} \ldots \overset{ai}{L}_{x+k}$; es ist daher die Wahrscheinlichkeit, dafs am Ende des 1., 2., 3. . . . k-ten Jahres sowohl die Frau, als auch der in demselben Jahre invalid gewordene Mann noch am Leben sind:

$$\frac{\overset{ai}{L}_{x+1}}{A_x} \cdot \frac{L_{y+1}}{L_y}, \; \frac{\overset{ai}{L}_{x+2}}{A_x} \cdot \frac{L_{y+2}}{L_y}, \; \frac{\overset{ai}{L}_{x+3}}{A_x} \cdot \frac{L_{y+3}}{L_y}, \ldots \frac{\overset{ai}{L}_{x+k}}{A_x} \cdot \frac{L_{y+k}}{L_y},$$

mithin:

$$V_{x,y} = \frac{\overset{ai}{L}_{x+1}}{A_x} \cdot \frac{L_{y+1}}{L_y} \cdot \frac{\overset{i}{R}_{x+1,y+1}}{r} + \frac{\overset{ai}{L}_{x+2}}{A_x} \cdot \frac{L_{y+2}}{L_y} \cdot \frac{\overset{i}{R}_{x+2,y+2}}{r^2}$$

$$+ \frac{\overset{ai}{L}_{x+3}}{A_x} \cdot \frac{L_{y+3}}{L_y} \cdot \frac{\overset{i}{R}_{x+3,y+3}}{r^3} + \ldots \qquad 5)$$

wo $\overset{i}{R}_{x+1,y+1}, \overset{i}{R}_{x+2,y+2} \ldots$ die Verbindungsrente der Frau mit einem invaliden Monate bezeichnet.

Nach y diskontiert ist ferner:

$$V_{x,y} = \frac{\overset{ai}{L}_{x+1} D_{y+1} \overset{i}{R}_{x+1,y+1} + \overset{ai}{L}_{x+2} D_{y+2} \overset{i}{R}_{x+2,y+2}}{A_x D_y} + \frac{\overset{ai}{L}_{x+3} D_{y+3} \overset{i}{R}_{x+3,y+3}}{A_x D_y} + \ldots \qquad 6)$$

oder:

$$V_{x,y} = \frac{\Sigma \overset{ai}{L}_{x+1} D_{y+1} \overset{i}{R}_{x+1,y+1}}{A_x D_y}, \qquad 7)$$

Es ergiebt sich daher nach Formel 4):

$$W_{x,y} = \frac{\left(\varDelta_{x+1} \Sigma D_{y+1} - \overset{ai}{L}_{x+1} D_{y+1} \overset{i}{R}_{x+1,y+1}\right)}{A_x D_y} + \frac{\left(\varDelta_{x+2} \Sigma D_{y+2} - \overset{ai}{L}_{x+2} D_{y+2} \overset{i}{R}_{x+2,y+2}\right)}{A_x D_y} + \ldots \qquad 8)$$

Die Verbindungsrenten $\overset{i}{R}_{x+k,y+k}$ müssen aus einer Sterbetafel der Invaliden J_x, J_{x+1}, J_{x+2}, ... und einer Sterbetafel für Frauen abgeleitet werden.

Da:

$$\overset{i}{R}_{x+k,y+k} = \frac{\Sigma J_{x+k} D_{y+k}}{J_{x+k} D_{y+k}},$$

ist:

$$\overset{ai}{L}_{x+k} D_{y+k} \overset{i}{R}_{x+k,y+k} = \frac{\overset{ai}{L}_{x+k}}{J_{x+k}} \Sigma J_{x+k} D_{y+k},$$

folglich auch:

$$W_{x,y} = \frac{\left(\varDelta_{x+1} \Sigma D_{y+1} - \frac{\overset{ai}{L}_{x+1}}{J_{x+1}} \Sigma J_{x+1} D_{y+1}\right)}{A_x D_y} + \frac{\left(\varDelta_{x+2} \Sigma D_{y+2} - \frac{\overset{ai}{L}_{x+2}}{J_{x+2}} \Sigma J_{x+2} D_{y+2}\right)}{A_x D_y} + \ldots \qquad 9)$$

Setzen wir noch Kürze halber:

$$\varDelta_{x+k} \Sigma D_{y+k} - \frac{\overset{ai}{L}_{x+k}}{J_{x+k}} \Sigma J_{x+k} D_{y+k} = M_{x+k}$$

so erhalten wir:

$$W_{x,y} = \frac{M_{x+1} + M_{x+2} + M_{x+3} + \cdots}{A_x D_y} = \frac{\Sigma M_{x+1}}{A_x D_y} \qquad 10)$$

In Formel 10) bezeichnet M_{x+1}, M_{x+2}, M_{x+3}, ... den gegenwärtigen Wert der durch die Invalidisierungen und die im aktiven Zustande eingetretenen Sterbefälle des 1., 2., 3. ... Jahres entstehenden Verpflichtungen der Versicherungsanstalt.

Ist eine k-jährige Karenz vorausgesetzt, d. h. erhalten die Witwen der in den ersten k Jahren invalid Gewordenen oder im aktiven Zustande Verstorbenen keine Witwen-Pension, so fallen die ersten k Glieder im Zähler weg, mithin:

$$^{k}\overline{W}_{x,y} = \frac{M_{x+k+1} + M_{x+k+2} + M_{x+k+3} + \cdots}{A_x D_y} = \frac{\Sigma M_{x+k+1}}{A_x D_y} \qquad 11)$$

Soll die Witwen-Pension mit der Dienstzeit des Mannes steigen, d. h. sollen die Witwen der im 1. Jahre invalid Gewordenen eine Rente im jährlichen Betrage 1, der im 2. Jahre invalid Gewordenen im jährlichen Betrage 2, der im 3. Jahre invalid Gewordenen im jährlichen Betrage 3 u. s. w. erhalten, so geht die Formel 10) über in:

$$\overset{\angle}{W}_{x,y} = \frac{M_{x+1} + 2\,M_{x+2} + 3\,M_{x+3} + \cdots}{A_x D_y} = \frac{\Sigma\Sigma M_{x+1}}{A_x D_y}. \qquad 12)$$

Falls die Witwen-Pension nur bis zu einem Betrage n steigt und dann konstant bleibt, ist

$$^{n\lceil}\overline{W}_{x,y} = \frac{M_{x+1} + 2\,M_{x+2} + 3\,M_{x+3} + \cdots}{A_x D_y}$$

$$+ \frac{n\,M_{x+n} + n\,M_{x+n+1} + n\,M_{x+n+2} + \cdots}{A_x D_y}$$

$$= \frac{\Sigma\Sigma M_{x+1} - \Sigma\Sigma M_{x+n+1}}{A_x D_y} \qquad 13)$$

Ist überdies noch eine k-jährige Karenz vorausgesetzt, so ist:

$$^{n\lceil}_{k}W_{x,y} = \frac{M_{x+k+1} + 2\,M_{x+k+2} + 3\,M_{x+k+3} + \cdots}{A_x D_y}$$

$$+ \frac{n\,M_{x+k+n} + n\,M_{x+k+n+1} + n\,M_{x+k+n+2} + \cdots}{A_x D_y} \qquad 14)$$

oder:

$$ {}^{n}_{k}\overline{W}_{x,y} = \frac{\Sigma\Sigma M_{x+k+1} - \Sigma\Sigma M_{x+k+n+1}}{A_x D_y} \qquad 15) $$

Soll die Witwen-Pension nach k-jähriger Karenz mit α Prozent des Gehaltes G des Mannes beginnen und für jedes weitere Dienstjahr um β Prozent bis zur Erreichung des Maximums von $(\alpha + n\beta)$ Prozent steigen, so ist:

$$ \hat{W}_{x,y} = \left(\frac{\alpha M_{x+k+1} + (\alpha+\beta) M_{x+k+2} + (\alpha + 2\beta) M_{x+k+3} + \ldots}{A_x D_y} \right. $$

$$ \left. + \frac{(\alpha + n\beta)(M_{x+k+n+1} + M_{x+k+n+2} + \ldots)}{A_x D_y} \right) \cdot \frac{G}{100} \qquad 16) $$

oder:

$$ \hat{W}_{x,y} = \frac{(\alpha - \beta)\Sigma M_{x+k+1} + \beta(\Sigma\Sigma M_{x+k+1} - \Sigma\Sigma M_{x+k+n+2})}{A_x D_y} \cdot \frac{G}{100} \qquad 17) $$

Zur Berechnung von $W_{x,y}$ und $\overset{\angle}{W}_{x,y}$ wird man vorerst folgende Hilfs-Tabelle anlegen:

$$ y = x - d $$

x	A_x	$\varDelta_{x+1} = A_x - A_{x+1}$	$\log \varDelta_{x+1}$	$\log \Sigma D_{y+1}$	$\log \varDelta_{x+1} + \log \Sigma D_{y+1}$	$\log \overset{ai}{L}_{x+1}$	$\log D_{y+1}$	$\log \overset{i}{R}_{x+1,y+1}$	$\log \overset{ai}{L}_{x+1} + \log D_{y+1} + \log \overset{i}{R}_{x+1,y+1}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

$\varDelta_{x+1} \Sigma D_{y+1}$	$\overset{ai}{L}_{x+1} D_{y+1} \overset{i}{R}_{x+1,y+1}$	$M_{x+1} = \varDelta_{x+1} \Sigma D_{y+1} - \overset{a}{L}_{x+1} D_{y+1} \overset{i}{R}_{x+1,y+1}$	$\Sigma M_{x+1} = M_{x+1} + \Sigma M_{x+2}$	$\Sigma\Sigma M_{x+1} = \Sigma M_{x+1} + \Sigma\Sigma M_{x+2}$
11	12	13	14	15

Die Werte von A_x sind aus der Dekrementen-Tafel der Aktiven (§ 79) bekannt; die Werte von D_{y+1} und ΣD_{y+1}, mithin auch log D_{y+1} und log ΣD_{y+1} (Kolonne 8 u. 5) werden einer Renten-Grundtafel für Frauen entnommen, die Werte von $\overset{ai}{L}_{x+1}$ (die aus A_x Aktiven innerhalb eines Jahres hervorgegangen und am Ende des Jahres noch lebenden Invaliden) wurden bereits in der Tabelle zu § 82 (Kolonne 5) berechnet, es ist mithin log $\overset{ai}{L}_{x+1}$ (Kolonne 7) bekannt, die Werte von $\overset{i}{R}_{x+1,y+1}$, mithin auch log $\overset{i}{R}_{x+1,y+1}$ (Kolonne 9) müssen einer zuvor zu berechnenden Tafel für Verbindungsrenten von Frauen mit invaliden Männern entnommen werden. Kolonne 6 wird durch Summierung der in derselben Zeile befindlichen Werte von Kolonne 4 und 5, ebenso Kolonne 10 durch Summierung der Werte derselben Zeile von Kolonne 7, 8 und 9 gefunden, Colonne 11 ist der numerus zu Kolonne 6, Kolonne 12 der numerus zu Kolonne 10; Kolonne 13 ist die Differenz von Kolonne 11, abzüglich Kolonne 12; Kolonne 14 wird aus Kolonne 13 ebenso gewonnen, wie die Summe der diskontierten Zahlen aus den diskontierten Zahlen, endlich Kolonne 15 aus Kolonne 14 wie die Doppel-Summe der diskontierten Zahlen aus der Summe der diskontierten Zahlen.

Nach Fertigstellung der vorstehenden Hilfs-Tabelle wird man nun $W_{x,y}$ und $\overset{\angle}{W}_{x,y}$ nach folgendem Schema berechnen:

$$y = x - d.$$

x	log ΣM_{x+1}	log $\Sigma\Sigma M_{x+1}$	log A_x	log D_y
1	2	3	4	5

log A_x + log D_y	log ΣM_{x+1} − (log A_x + log D_y) = log $W_{x,y}$	log $\Sigma\Sigma M_{x+1}$ − (log A_x + log D_y) = log $\overset{\angle}{W}_{x,y}$	$W_{x,y}$	$\overset{\angle}{W}_{x,y}$
6	7	8	9	10

Da sich Formel 17) auch schreiben läſst:

$$\hat{W}_{x,y} =$$
$$\left[(\alpha - \beta)\frac{\Sigma M_{x+k+1}}{A_x D_y} + \beta\frac{\Sigma\Sigma M_{x+k+1}}{A_x D_y} - \beta\frac{\Sigma\Sigma M_{x+k+n+2}}{A_x D_y}\right]\frac{G}{100}$$

und:

$$\frac{\Sigma M_{x+k+1}}{A_x D_y} = {}^{k}\overline{W}_{x,y},$$

$$\frac{\Sigma\Sigma M_{x+k+1}}{A_x D_y} = {}^{k}\overset{\angle}{W}_{x,y}$$

$$\frac{\Sigma\Sigma M_{x+k+n+2}}{A_x D_y} = {}^{(k+n+1)}\overset{\angle}{W}_{x,y}$$

geht Formel 17) noch über in:

$$\hat{W}_{x,y} = \left[(\alpha - \beta)\,{}^{k}\overline{W}_{x,y} + \beta\left({}^{k}\overset{\angle}{W}_{x,y} - {}^{(k+n+1)}\overset{\angle}{W}_{x,y}\right)\right]\frac{G}{100}. \qquad 18)$$

Es empfiehlt sich daher, auſser dem Werte von $W_{x,y}$ und $\overset{\angle}{W}_{x,y}$ auch die Werte der konstanten und steigenden Witwen-Pension mit Karenz ${}^{k}\overline{W}_{x,y}$ und ${}^{k}\overset{\angle}{W}_{x,y}$ für alle erforderlichen Werte von k zu berechnen, da dieselben nicht nur zur Berechnung des Wertes von $\hat{W}_{x,y}$, sondern auch bei Berechnung der Prämien-Reserve mit Vorteil verwendet werden können.

Nach den Statuten der meisten Pensions-Institute ist die Witwen-Pension nicht direkt von der Höhe des Gehaltes des Mannes, sondern von der Höhe der Pension abhängig, die derselbe, falls er als Invalider starb, bezogen hatte, oder, falls er als Aktiver starb, seiner Teilnahmszeit am Pensions-Institute entsprechend bezogen hätte, falls er nicht gestorben, sondern nach derselben Teilnahmszeit invalid geworden wäre.

Soll z. B. wie in dem im § 86 angeführten Beispiele die Pension des Mannes nach 10-jähriger Karenz 40 % des Gehaltes betragen, für jedes weitere Teilnahmsjahr am Pensions-Institute um 2 % bis zum Maximum von 100 % des Gehaltes steigen, die Pension der Witwe dagegen ²/₃ der

Pension des Mannes betragen, so beginnt die Witwen-Pension nach 10-jähriger Karenz mit $\frac{80}{3}\,\% = 26\frac{2}{3}\,\%$ des Gehaltes des Mannes und steigt jährlich um $\frac{4}{3}\,\% = 1\frac{1}{3}\,\%$ bis zum Maximum von $\frac{200}{3}\,\% = 66\frac{2}{3}\,\%$.

Setzen wir daher in Formel 18) $\alpha = \frac{80}{3}$, $\beta = \frac{4}{3}$, $\alpha + n\beta = \frac{200}{3}$, mithin $n = 30$, ferner $k = 10$, so erhalten wir:

$$\hat{W}_{x,y} = \left[\tfrac{76}{3}\,{}^{10}\overline{W}_{x,y} + \tfrac{4}{3}\left({}^{10\angle}W_{x,y} - {}^{41\angle}W_{x,y}\right)\right]\frac{G}{100}. \qquad 19)$$

Zu demselben Resultate gelangen wir, wenn wir für α und β die Prozente der Pension des Mannes setzen, $\alpha = 40$, $\beta = 2$, $\alpha + n\beta = 100$, mithin $n = 30$, und wie vorhin $k = 10$, dagegen für G blofs $\frac{2\,G}{3}$. Formel 18) geht alsdann über in:

$$\hat{W}_{x,y} = \left[38\,{}^{10}\overline{W}_{x,y} + 2\left({}^{10\angle}W_{x,y} - {}^{41\angle}W_{x,y}\right)\right]\frac{2\,G}{300}, \qquad 20)$$

was mit dem in Formel 19) für $\hat{W}_{x,y}$ gefundenen Werte übereinstimmt.

---

§ 92. Waisen-Pension.

Ist x das Alter des Vaters, z das Alter des Kindes, und soll dieses gegen eine Einmal-Prämie $V_{x,z}$ auf eine, nach dem Ableben des Vaters beginnende, zu Beginn eines jeden Jahres bis zum erreichten m-ten Lebensjahre des Kindes zahlbare Rente versichert werden, so erhalten wir $V_{x,z}$ aus dem Werte $W_{x,y}$ der Witwen-Pension, wenn statt der lebenslänglichen Leib- und Verbindungsrenten kurze Renten gesetzt werden.

Es ist daher:

$$V_{x,z} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{k=m-z-1}\left(\varDelta_{x+k}\,D_{z+k}\,\overline{R}^{\,m-z-k}_{z+k} - L^{ai}_{x+k}\,D_{z+k}\,\overset{i}{\overline{R}}{}^{\,m-z-k}_{x+k,\,z+k}\right)}{A_x\,D_z} \qquad 1)$$

und, da:

$$\overset{m-s-k}{\overline{R}}_{s+k} = \frac{\Sigma D_{s+k} - \Sigma D_m}{D_{s+k}},$$

$$\overset{m-s-k}{\overline{R}}{}^{i}_{x+k,\, s+k} = \frac{\Sigma J_{x+k} D_{s+k} - \Sigma J_{x+m-s} D_m}{J_{x+k} D_{s+k}}$$

folgt:

$$V_{x,s} =$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{k=m-s-1} \left[\Delta_{x+k}(\Sigma D_{s+k} - \Sigma D_m) - \frac{L^{ai}_{x+k}}{J_{x+k}} (\Sigma J_{x+k} D_{s+k} - \Sigma J_{x+m-s} D_m) \right]}{A_x D_s}$$

oder:

$$V_{x,s} = \frac{\sum_{k=1}^{k=m-s-1} M_{x+k}}{A_x D_s} \qquad 2)$$

wo:

$$M_{x+k} = \Delta_{x+k} (\Sigma D_{s+k} - \Sigma D_m)$$

$$- \frac{L^{ai}_{x+k}}{J_{x+k}} (\Sigma J_{x+k} D_{s+k} - \Sigma J_{x+m-s} D_m) \qquad 3)$$

Da die Waisen-Pensionen in der Regel nur mit einem geringen Prozentsatze des Gehaltes oder der Pension des Vaters bemessen werden und infolge des Umstandes, dafs dieselben nicht lebenslänglich, sondern nur eine Anzahl von Jahren hindurch zu zahlen sind, im Vergleich zu den übrigen Verpflichtungen der Pensions-Institute nicht ins Gewicht fallen, wird in der Praxis häufig mit Rücksicht auf die komplizierte Berechnungsart von einer genauen Berechnung des Wertes der Waisen-Pensionen abgesehen und dieselben blofs schätzungsweise als ein aliquoter Teil des Wertes der Witwen-Pensionen in Rechnung gestellt.

---

§ 93. Jahres-Prämien.

Ist P_x die Einmal-Prämie irgend einer Pensionsversicherung, mag dieselbe eine Pensionsversicherung für den Mann allein, eine Versicherung auf eine Witwen- oder Waisen-Pension bedeuten, ist ferner p_x die während der

Aktivitätsdauer des Mannes von demselben zu zahlende Jahres-Prämie, so mufs:

$$p_x \overset{a}{R}_x = P_x$$

mithin:

$$p_x = \frac{P_x}{\overset{a}{R}_x},$$

wo $\overset{a}{R}_x$ die Aktiven-Rente für einen x-jährigen Mann bedeutet.

Soll beispielsweise die während der Aktivitätsdauer zu zahlende Jahres-Prämie $\hat{p}_x$ zur Deckung der Invaliden-, Witwen- und Waisen-Pension im Einmal-Werte $\hat{P}_x$, beziehungsweise $\hat{W}_{x,y}$, beziehungsweise $\hat{V}_{x,z}$ für den x-jährigen Aktiven, dessen Witwe und Waisen dienen, so ist:

$$\hat{p}_x \overset{a}{R}_x = \hat{P}_x + \hat{W}_{x,y} + \hat{V}_{x,z}$$

und:

$$\hat{p}_x = \frac{\hat{P}_x + \hat{W}_{x,y} + \hat{V}_{x,z}}{\hat{R}_x}.$$

Da jedoch bei den Pensions-Instituten die Jahres-Prämien in der Regel nicht nach dem Beitrittsalter abgestuft, sondern für alle Mitglieder mit demselben Prozentsatze des Jahresgehaltes berechnet werden, finden wir die Durchschnittsprämie p für die Einheit des Jahresgehaltes aus der Gleichung:

$$p \Sigma \overset{a}{R}_x G_x = \Sigma \hat{P}_x G_x + \Sigma \hat{W}_{x,y} G_x + \Sigma \hat{V}_{x,z} G_x,$$

woraus:

$$p = \frac{\Sigma \hat{P}_x G_x + \Sigma \hat{W}_{x,y} G_x + \Sigma \hat{V}_{x,z} G_x}{\Sigma \overset{a}{R}_x G_x},$$

wo $\Sigma \overset{a}{R}_x G_x$, $\Sigma \hat{P}_x G_x$, $\Sigma \hat{W}_{x,y} G_x$, $\Sigma \hat{V}_{x,z} G_x$ die Summe der Produkte des Jahresgehaltes jedes einzelnen Mitgliedes mit dem Werte seiner Aktivitätsrente, seiner auf den Jahresgehalt 1 bezogenen Invaliden-, beziehungsweise Witwen- und Waisenpensions-Anwartschaft bezeichnet.

---

§ 94. Prämien-Reserve.

Die Prämien-Reserve wird am einfachsten nach der prospektiven Methode berechnet; ist das Alter des Mannes

zur Zeit des Versicherungsabschlusses x, zur Zeit der Bilanzaufstellung $(x+n)$, die Einmal-Prämie der zukünftigen Verpflichtungen der Anstalt P_{x+n}, so ist die Prämien-Reserve n Jahre nach dem Abschlusse der Versicherung:

$$res_n(x) = P_{x+n} - p_x \overset{a}{R}_{x+n}.$$

So ist beispielsweise die Prämien-Reserve des Invalidenpensions-Anspruches eines beim Beitritte zum Pensions-Institute 25-jährigen Beamten unter der Voraussetzung einer 10-jährigen Karenz, einer nach der Karenz mit 40 % des Jahresgehaltes beginnenden, jährlich um 2 % des Jahresgehaltes bis zum vollen Gehalte steigenden Pension, falls der Jahresgehalt als konstant angenommen wird:

Nach 7-jähriger Versicherungsdauer:

$$res_7(\hat{P}_{25}) = [0{\cdot}40\, {}^{3}\overline{P}_{32} + 0{\cdot}02\,({}^{4}\overset{\angle}{P}_{32} - {}^{34}\overset{\angle}{P}_{32})]G$$

oder:

$$res_7(\hat{P}_{25}) = [0{\cdot}38\, {}^{3}\overline{P}_{32} + 0{\cdot}02\,({}^{3}\overset{\angle}{P}_{32} - {}^{34}\overset{\angle}{P}_{32})]G.$$

Nach 19-jähriger Versicherungsdauer, da eine Karenz nicht mehr besteht:

$$res_{19}(\hat{P}_{25}) = [0{\cdot}58\, P_{44} + 0{\cdot}02\,({}^{1}\overset{\angle}{P}_{44} - {}^{22}\overset{\angle}{P}_{44})]G$$

oder:

$$res_{19}(\hat{P}_{25}) = [0.56\, P_{44} + 0{\cdot}02\,(\overset{\angle}{P}_{44} - {}^{22}\overset{\angle}{P}_{44})]G.$$

Für bereits flüssige Pensionen findet eine Prämienzahlung nicht mehr statt, mithin ist:

$$res_n(x) = P_{x+n}.$$

Fünfter Abschnitt.

Krankenversicherung.

Elftes Kapitel.

§ 95. Einmal- und Jahres-Prämien.

Während die Invalidität eine dauernde Erwerbsunfähigkeit zur Folge hat, ist die Erwerbsunfähigkeit infolge von Krankheit blofs eine zeitweilige.

Es soll die Einmal-Prämie K_x berechnet werden, die eine x-jährige Person zahlen mufs, um im Falle ihrer Erkrankung für jeden Krankheitstag ein Krankengeld im Betrage 1 ausbezahlt zu erhalten.

Beträgt die auf Grund von statistischen Daten ermittelte wahrscheinliche Krankheitsdauer während eines Jahres für eine x, $(x+1)$, $(x+2)$, ... $(x+m)$-jährige Person k_x, k_{x+1}, k_{x+2}, ... k_{x+m} Tage, nehmen wir ferner an, dafs sämtliche A_x Personen der Dekremententafel der Aktiven der Versicherung beitreten, so ist die eingehobene Prämie $A_x K_x$.

Da sich die Auszahlung des Krankengeldes auf das ganze Jahr gleichmäfsig verteilt, können wir annähernd annehmen, dafs dasselbe für jeden Krankheitsfall in der Mitte des Jahres ausbezahlt wird.

Im ersten Jahre wird der Betrag $A_x k_x$ in der Mitte des 1. Jahres ausbezahlt, der gegenwärtige Wert des ausbezahlten Betrages ist daher $\frac{A_x k_x}{\sqrt{r}}$, im 2. Jahre wird der Betrag $A_{x+1} k_{x+1}$ in der Mitte des 2. Jahres, d. i. nach $\frac{3}{2}$ Jahren ausbezahlt, der gegenwärtige Wert des ausbezahlten Betrages ist daher $\frac{A_{x+1} k_{x+1}}{r\sqrt{r}}$ u. s. w.

Da der Wert der eingehobenen Prämien dem Werte der ausbezahlten Krankengelder gleich sein mufs, folgt:

$$A_x K_x = \frac{A_x k_x}{\sqrt{r}} + \frac{A_{x+1} k_{x+1}}{r\sqrt{r}} + \frac{A_{x+2} k_{x+2}}{r^2\sqrt{r}} + \ldots \qquad 1)$$

oder:

$$A_x K_x = \frac{1}{\sqrt{r}}\left(A_x k_x + \frac{A_{x+1} k_{x+1}}{r} + \frac{A_{x+2} k_{x+2}}{r^2} + \ldots\right) \qquad 2)$$

mithin:

$$K_x = \frac{1}{\sqrt{r}}\left(\frac{A_x k_x}{A_x} + \frac{A_{x+1} k_{x+1}}{r A_x} + \frac{A_{x+2} k_{x+2}}{r^2 A_x} + \ldots\right) \qquad 3)$$

oder nach erfolgter Diskontierung:

$$K_x = \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{k_x DA_x + k_{x+1} DA_{x+1} + k_{x+2} DA_{x+2} + \ldots}{DA_x} \qquad 4)$$

oder:

$$K_x = \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\Sigma k_x DA_x}{DA_x} \qquad 5)$$

Wir sind von der Dekremententafel der Aktiven und nicht der Lebenden überhaupt ausgegangen, da einer Krankenkasse doch nur aktive Personen beitreten und für Krankheitsfälle während der Invalidität in der Regel kein Krankengeld mehr gewährt wird, da das Krankengeld als Ersatz für den Verdienstentgang aufgefafst wird, überdies für den Invaliden durch eine Invalidenrente bereits gesorgt ist.

Ist p_x die während der ganzen Aktivitätsdauer zu zahlende Jahres-Prämie des x-jährigen für ein Krankengeld im Betrage 1 für jeden Krankheitstag, so mufs:

$$p_x R_x^a = K_x \qquad 6)$$

mithin:

$$p_x = \frac{K_x}{R_x^a} = \frac{\Sigma k_x DA_x}{\sqrt{r}\, DA_x} : \frac{\Sigma DA_x}{DA_x} \qquad 7)$$

oder:

$$p_x = \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\Sigma k_x D A_x}{\Sigma D A_x}. \tag{8}$$

Meistens enthalten die Statuten der Krankenkasse die Bestimmung, dafs die Prämienzahlung während der Dauer der Krankheit unterbleibt; hiedurch wird sich die Jahres-Prämie ändern, dieselbe sei in diesem Falle π_x.

Gegen diese Prämie π_x ist der Versicherte nicht nur auf ein tägliches Krankengeld im Betrage 1, sondern aufserdem noch auf ein tägliches Krankengeld in der Höhe des auf e i n e n Tag entfallenden Teiles der Jahres-Prämie, d. i. im Betrage $\frac{\pi_x}{365}$ versichert.

Es ist daher:

$$\pi_x \overset{a}{R}_x = \left(1 + \frac{\pi_x}{365}\right) K_x \tag{9}$$

woraus:

$$\pi_x = \frac{K_x}{\overset{a}{R}_x - \frac{K_x}{365}} \tag{10}$$

und mit Berücksichtigung von 6)

$$\pi_x = \frac{p_x \overset{a}{R}_x}{\overset{a}{R}_x - \frac{p_x \overset{a}{R}_x}{365}} \tag{11}$$

oder:

$$\pi_x = \frac{p_x}{1 - \frac{p_x}{365}}. \tag{12}$$

Die Jahres-Prämie π_x ergiebt sich auch aus folgender Betrachtung.

Ist p_x die Jahres-Prämie für ein tägliches Krankengeld im Betrage 1, so ist die Jahres-Prämie für ein tägliches

Krankengeld im Betrage von $\left(1+\frac{\pi_x}{365}\right)$ gleich $p_x\left(1+\frac{\pi_x}{365}\right)$ mithin:

$$\pi_x = p_x\left(1+\frac{\pi_x}{365}\right),$$

woraus, wie in 12):

$$\pi_x = \frac{p_x}{1-\frac{p_x}{365}}.$$

Zur Berechnung der Einmal-Prämie $K_x = \frac{1}{\sqrt{r}}\,\frac{\Sigma k_x DA_x}{DA_x}$ kann man das folgende Schema benützen:

x	$\log A_x$	$x \log \frac{1}{r}$	$\log DA_x = \log A_x + x \log \frac{1}{r}$	$\log k_x$	$\log k_x + \log DA_x$	$k_x DA_x$
1	2	3	4	5	6	7

$\Sigma k_x DA_x$	$\log \Sigma k_x DA_x$	$\log(\sqrt{r}\, DA_x) = \log DA_x + \frac{1}{2}\log r$	$\log K_x = \log \Sigma k_x DA_x - \log(\sqrt{r}\, DA_x)$	K_x
8	9	10	11	12

worauf dann leicht p_x und π_x nach Formel 7) und 12) berechnet werden kann.

Wir lassen nunmehr eine Morbilitäts-Tabelle folgen, welche die Beobachtungen der Leipziger Kranken-, Invaliden- und Lebensversicherungs-Gesellschaft „Gegenseitigkeit“ von Dr. Karl Heym (Leipzig 1878) und die Beobachtungen Gustav Behm’s für das sämtliche Eisenbahn-Personal enthält und in welcher, wie bisher, x das Alter und k_x die in

Tagen angegebene durchschnittliche Krankheitsdauer während eines Jahres für eine Person vom Alter x bezeichnet.

x	k_x nach Heym	k_x nach Behm	x	k_x nach Heym	k_x nach Behm	x	k_x nach Heym	k_x nach Behm	x	k_x nach Heym
16	6·32		37	6·17	8·190	58	12·72	16·598	79	25·95
17	6·16		38	6·33	8·478	59	13·19	17·106	80	26·75
18	6·02		39	6·51	8·757	60	13·69	17·465	81	27 56
19	5·89		40	6·70	8·987	61	14·20	18·033	82	28·39
20	5·78		41	6·90	9·266	62	14·72	18 249	83	29·23
21	5·68	6·167	42	7·12	9·430	63	15·26	18·181	84	30·09
22	5·60	6·922	43	7·36	9 606	64	15·81	18·272	85	30·96
23	5·53	7·543	44	7·61	9·781	65	16·38	18·105	86	31·85
24	5·47	8·005	45	7·88	9·968	66	16·97	17·542	87	32·76
25	5·44	8·319	46	8·16	10·177	67	17·57	16·938	88	33·67
26	5·42	8·320	47	8·45	10·421	68	18·18	16 065	89	34·61
27	5·41	8·138	48	8·76	10·677	69	18·81	15·548	90	35·56
28	5·42	7·975	49	9·09	10·954	70	19·46	15·062	91	36·52
29	5·44	7·719	50	9·43	11·347	71	20 12		92	37·50
30	5·48	7·490	51	9·79	11·754	72	20·80		93	38·50
31	5·53	7·357	52	10·16	12·189	73	21·49		94	39·51
32	5 60	7·372	53	10·55	12 790	74	22·19		95	40·53
33	5·68	7·387	54	10·95	13·518	75	22·92		96	41·37
34	5·78	7·521	55	11·37	14·302	76	23·65		97	42·63
35	5·90	7·715	56	11·80	15·035	77	24·40			
36	6·03	7·950	57	12·25	15·853	78	25·17			

§ 96. Durchschnitts-Prämien.

Treten der Krankenkasse gleichzeitig M_x Personen vom Alter x, M_{x+1} vom Alter $(x+1)$, M_{x+2} vom Alter $(x+2)\ldots$ u. s. w. bei, so ist der Wert der künftigen Verpflichtungen der Kasse:

$$M_x K_x + M_{x+1} K_{x+1} + M_{x+2} K_{x+2} + \ldots$$
$$= M_x p_x \overset{a}{R}_x + M_{x+1} p_{x+1} \overset{a}{R}_{x+1} + M_{x+2} p_{x+2} \overset{a}{R}_{x+2} + \ldots \qquad 1)$$

Wird von allen Mitgliedern dieselbe Jahres-Prämie, die Durchschnitts-Prämie p, eingehoben, so ist der Wert der Einzahlungen der Mitglieder:

$$p\left(M_x \overset{a}{R}_x + M_{x+1} \overset{a}{R}_{x+1} + M_{x+2} \overset{a}{R}_{x+2} + \ldots\right).$$

Da der Wert der Einzahlungen der Mitglieder dem Werte der Verpflichtungen der Anstalt gleich sein mufs, folgt:

$$p\left(M_x \overset{a}{R}_x + M_{x+1}\overset{a}{R}_{x+1} + M_{x+2}\overset{a}{R}_{x+2} + \dots\right)$$

$$= p_x \,.\, M_x \overset{a}{R}_x + p_{x+1} M_{x+1} \overset{a}{R}_{x+1} + p_{x+2} M_{x+2} \overset{a}{R}_{x+2} + \dots \quad 2)$$

woraus sich als Durchschnitts-Prämie ergiebt:

$$p = \frac{p_x M_x \overset{a}{R}_x + p_{x+1} M_{x+1} \overset{a}{R}_{x+1} + p_{x+2} M_{x+2} \overset{a}{R}_{x+2} + \dots}{M_x \overset{a}{R}_x + M_{x+1} \overset{a}{R}_{x+1} + M_{x+2} \overset{a}{R}_{x+2} + \dots} \quad 3)$$

Ist $M = M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \dots$ gleich der Anzahl sämtlicher Mitglieder, so ist weiters:

$$p = \frac{\frac{M_x}{M} p_x \overset{a}{R}_x + \frac{M_{x+1}}{M} p_{x+1} \overset{a}{R}_{x+1} + \frac{M_{x+2}}{M} p_{x+2} \overset{a}{R}_{x+2} + \dots}{\frac{M_x}{M} \overset{a}{R}_x + \frac{M_{x+1}}{M} \overset{a}{R}_{x+1} + \frac{M_{x+2}}{M} \overset{a}{R}_{x+2} + \dots} \quad 4)$$

oder, wenn wir setzen:

$$\frac{M_x}{M} = \alpha_x, \quad \frac{M_{x+1}}{M} = \alpha_{x+1}, \quad \frac{M_{x+2}}{M} = \alpha_{x+2}, \text{ u. s. w.}$$

$$p = \frac{\alpha_x p_x \overset{a}{R}_x + \alpha_{x+1} p_{x+1} \overset{a}{R}_{x+1} + \alpha_{x+2} p_{x+2} \overset{a}{R}_{x+2} + \dots}{\alpha_x \overset{a}{R}_x + \alpha_{x+1} \overset{a}{R}_{x+1} + \alpha_{x+2} \overset{a}{R}_{x+2} + \dots}$$

$$= \frac{\Sigma \alpha_x p_x \overset{a}{R}_x}{\Sigma \alpha_x \overset{a}{R}_x} \quad 5)$$

---

§ 97. Prämien-Reserve.

Sind zur Zeit der Aufstellung der Bilanz N_x Mitglieder vom Alter x, N_{x+1} vom Alter $(x+1)$, N_{x+2} vom Alter $(x+2)\dots$ vorhanden, so ist der Wert A der zukünftigen Verpflichtungen der Anstalt:

$$A = N_x K_x + N_{x+1} K_{x+1} + N_{x+2} K_{x+2} + \dots$$

oder:

$$A = N_x p_x \overset{a}{R}_x + N_{x+1} p_{x+1} \overset{a}{R}_{x+1} + N_{x+2} p_{x+2} \overset{a}{R}_{x+2} + \dots$$

Ist die Anzahl sämtlicher Versicherten:

$$N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \dots = N$$

so ist ferner:

$$A = N\left(\frac{N_x}{N} p_x \overset{a}{R}_x + \frac{N_{x+1}}{N} p_{x+1} \overset{a}{R}_{x+1} + \frac{N_{x+2}}{N} p_{x+2} \overset{a}{R}_{x+2} + \ldots\right)$$

oder, wenn wir setzen:

$$\frac{N_x}{N} = \beta_x, \quad \frac{N_{x+1}}{N} = \beta_{x+1}, \quad \frac{N_{x+2}}{N} = \beta_{x+2}, \ldots$$

$$A = N\left(\beta_x p_x \overset{a}{R}_x + \beta_{x+1} p_{x+1} \overset{a}{R}_{x+1} + \beta_{x+2} p_{x+2} \overset{a}{R}_{x+2} + \ldots\right) \qquad 1)$$

oder:

$$A = N \Sigma \beta_x p_x \overset{a}{R}_x . \qquad 2)$$

Der Wert B der zukünftigen Zahlungen der Versicherten dagegen ist:

$$B = p\,(N_x \overset{a}{R}_x + N_{x+1} \overset{a}{R}_{x+1} + N_{x+2} \overset{a}{R}_{x+2} + \ldots) \qquad 3)$$

$$B = pN\left(\frac{N_x}{N} \overset{a}{R}_x + \frac{N_{x+1}}{N} \overset{a}{R}_{x+1} + \frac{N_{x+2}}{N} \overset{a}{R}_{x+2} + \ldots\right) \qquad 4)$$

oder:

$$B = pN\,(\beta_x \overset{a}{R}_x + \beta_{x+1} \overset{a}{R}_{x+1} + \beta_{x+2} \overset{a}{R}_{x+2} + \ldots)$$
$$= pN \Sigma \beta_x \overset{a}{R}_x . \qquad 5)$$

Nach der prospektiven Methode ist die Prämienreserve

$$res = A - B,$$

mithin:

$$res = N \Sigma \beta_x p_x \overset{a}{R}_x - pN \Sigma \beta_x \overset{a}{R}_x \qquad 6)$$

oder:

$$res = N(\Sigma \beta_x p_x \overset{a}{R}_x - p \Sigma \beta_x \overset{a}{R}_x) \qquad 7)$$

oder auch:

$$res = N \Sigma \beta_x \overset{a}{R}_x \left(\frac{\Sigma \beta_x p_x \overset{a}{R}_x}{\Sigma \beta_x \overset{a}{R}_x} - p\right). \qquad 8)$$

Nach § 96. Formel 5) ist:

$$\frac{\Sigma \beta_x p_x \overset{a}{R}_x}{\Sigma \beta_x \overset{a}{R}_x} = p'$$

die zur Zeit der Bilanzaufstellung berechnete Durchschnitts-Prämie, folglich auch:

$$res = N \Sigma \beta_x \overset{a}{R}_x (p' - p), \qquad 9)$$